3e année FISA

Mise à niveau Signal

Introduction et systèmes LTI

Alexandre Boyer

alexandre.boyer@insa-toulouse.fr

https://moodle.insa-toulouse.fr → I2MAEL11 - Conception et Circuits et Traitement du Signal (clé : **signal21**)

Introduction

Signal

- Il transporte une information sur l'évolution temporelle, spatiale, d'une ou plusieurs quantités associées à un phénomène physique, quelle que soit sa nature.
- Classification :
  - Signaux à valeurs réels / complexes
  - Signaux déterministes / aléatoires
  - Temps continu / discret
  - A valeurs continues / discrètes
  - Mono / multi dimensionnel (nous considérerons des signaux temporels)

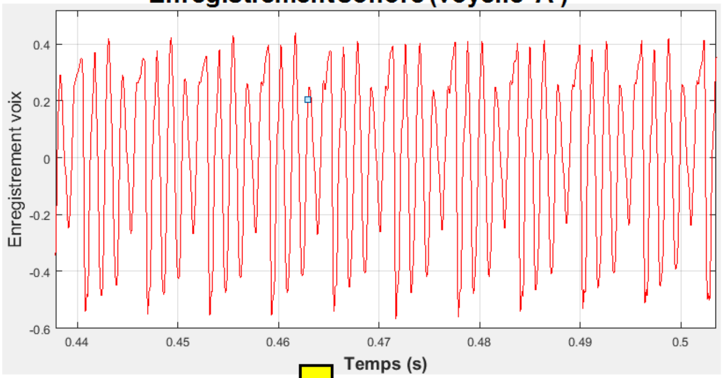
Introduction

Traitement du signal

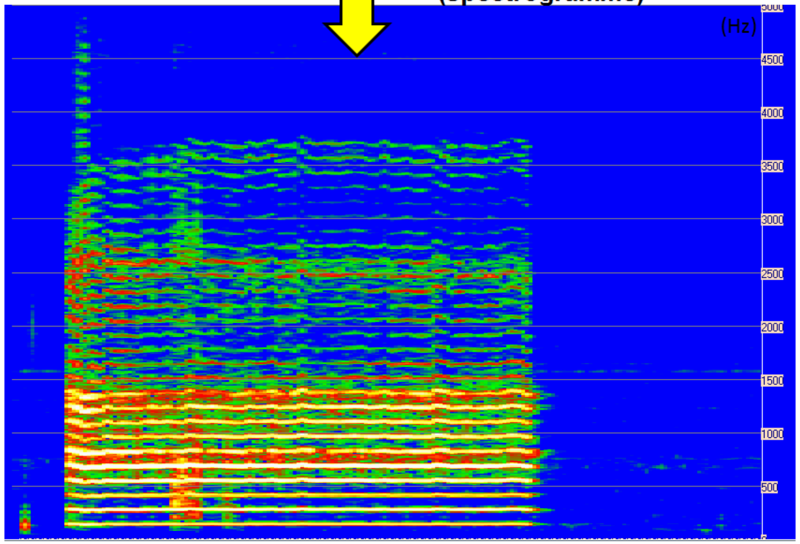
- Analyse et transformation des signaux en fonctions mathématiques ou paramètres afin d'en extraire l'information
- <u>Buts :</u>
  - Analyse
  - Mesure / estimation de paramètres
  - Détection / reconnaissance
  - Filtrage (élimination de « composantes parasites »)
  - Restauration
  - Synthèse
  - Codage, compression

Analyse fréquentielle (Fourier), filtrage

Enregistrement sonore (voyelle 'A')



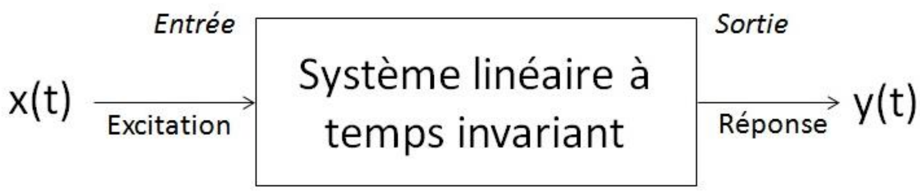
Analyse temps-fréquence (spectrogramme)



Introduction

Réponse d'un système linéaire

- Comment les systèmes répondent-ils à une excitation ?
- Quel(s) outil(s) mathématique(s) générique(s) permettent de prédire leur réponse, indépendamment de la nature du système ?
- Nous entendons par système le modèle mathématique, abstrait, décrivant le fonctionnement d'un objet physique.
- Classe particulière étudiée : les **systèmes linéaires à temps invariants (LTI)**



$$y(t) = L[x(t)]$$

Transformée de Laplace, produit de convolution, analyse fréquentielle (Fourier)

Contenu

1. Concepts de base pour l'étude des systèmes LTI et des signaux
2. Transformée de Laplace
3. Série de Fourier – Analyse fréquentielle des signaux
4. Transformée de Fourier

5 h de cours, 2.5 h de TD et 2.75 h de TP

Notation : contrôle final

Prérequis

- Le traitement de signal s'appuie sur de nombreux concepts et outils mathématiques, qu'il est indispensable de maîtriser.
- **Pré-requis mathématiques indispensables pour cet enseignement :**
  - ✓ Intégration
  - ✓ Dérivation
  - ✓ Trigonométrie
  - ✓ Nombres complexes
  - ✓ Représentation complexe des signaux sinusoïdaux

→ **Annexe A du polycopié (rappels + exercices corrigés)**

→ **Quiz d'auto-évaluation sur Moodle**

Outils numériques

- L’analyse des systèmes et le traitement du signal met en oeuvre des calculs potentiellement complexes, ne pouvant pas être toujours résolus à la main !

Recours aux outils de calcul numérique

Matlab

(fr.mathworks.com)

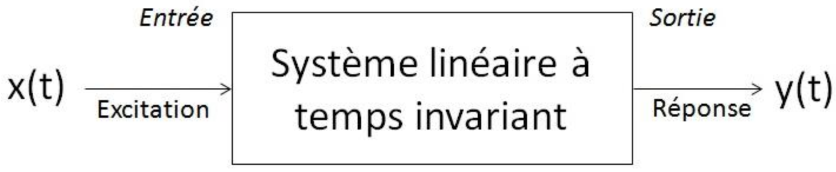
Octave

(www.gnu.org/software/octave/)

I – Concepts de base pour l’étude des systèmes LTI et des signaux

Définitions - linéarité

- Soit L est un opérateur modélisant la réponse du système à une excitation



y(t) = L[x(t)]

$$L: \begin{array}{ccc} L_E & \longrightarrow & L_E \\ x: t \mapsto x(t) & \longmapsto & y: t \mapsto y(t) \end{array}$$

- L est un opérateur linéaire si et seulement si (λ un réel quelconque) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad L\left[x_1 + \lambda x_2\right](t) = y_1(t) + \lambda y_2(t)$$

ou bien

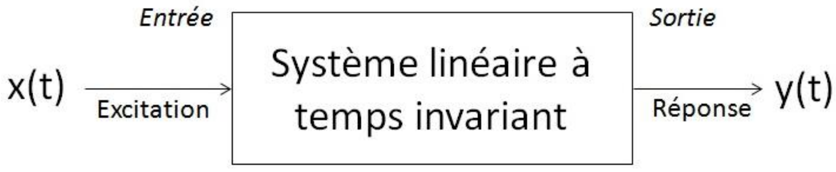
$$L\left[x_1 + \lambda x_2\right] = L\left[x_1\right] + \lambda L\left[x_2\right]$$

- <u>Conséquence :</u> théorème de superposition
- Trois opérateurs linéaires de base :

— proportionnel : $y = a \cdot x$ où a est une constante
— intégration : $y = a \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$ où a est une constante
— dérivée : $y = a \cdot \frac{df(x)}{dx}$ où a est une constante

Concepts de base

Définitions – invariance temporelle



y(t) = L[x(t)]

- Le système réagit de la même manière quel que soit l'instant où est appliqué le signal d'entrée.
- Indépendance au choix de l'origine des temps.

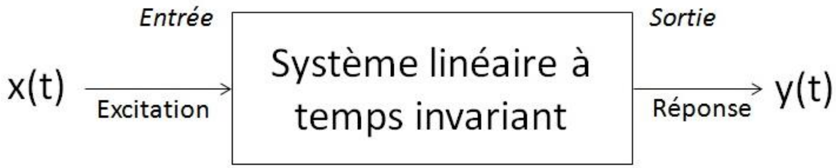
$$\forall t \in \mathbb{R},\ L[t \mapsto x(t-t_0)] = L[x](t-t_0)$$

- <u>Exemple :</u> l'effet d'un système est décrit par : $x \mapsto y = 2\frac{dx}{dt}$

Concepts de base

Définitions – Passivité/causalité

- Passif : pas d'énergie emmagasinée ou fournie par une entrée autre que celle sur laquelle on applique le signal d'entrée étudié.



y(t) = L[x(t)]

- Causalité : condition indispensable pour qu'un système soit physiquement réalisable.

$$\forall t < t_0 : x(t) = 0 \rightarrow \forall t < t_0 : y(t) = 0$$

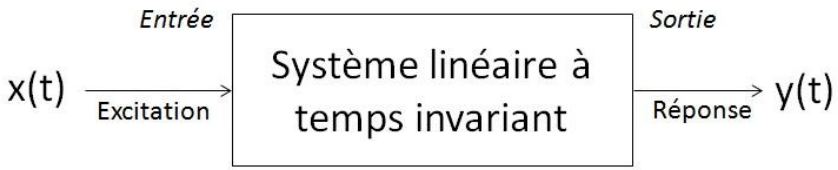
- Si un système physique n'est pas causal, alors le traitement est différé.

- On ne considéra que des systèmes causaux dans ce cours (convention utilisée : x(t) = 0 pour t < 0).

Linéarité – Invariance temporelle – Causalité - Exemple

Exercice 2.1

Définitions – Equations différentielles générales d'un système LTI

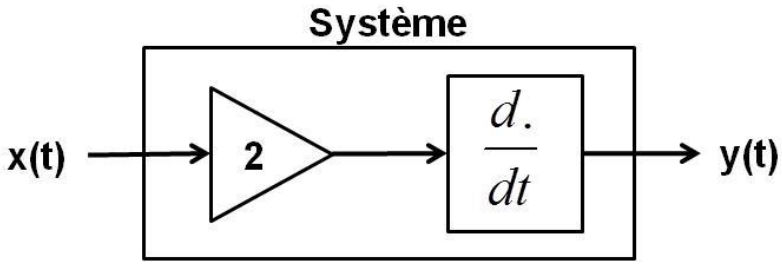


y(t) = L[x(t)]

- Le fonctionnement de tout système LTI (lien entre l'excitation x(t) et la réponse y(t) est décrit par l'équation différentielle suivante, superposition d'effets proportionnels, différenciateurs et intégrateurs

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{N} b_j \times \frac{d^j x}{dt^j}$$

- <u>Exemple :</u>



$$y(t) = 2\frac{dx}{dt}$$

Concepts de base

Réponse d'un système LTI

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{N} b_j \times \frac{d^j x}{dt^j}$$

Solutions ?

Si x(t) = 0 : réponse propre ou naturelle $y_0(t)$ (liée aux conditions initiales)

Si x(t) ≠ 0 : réponse forcée $y_f(t)$

Réponse générale du système :

$$y(t) = y_0(t) + y_f(t)$$

Concepts de base

Réponse naturelle d'un système LTI

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \checkmark \text{ Réponse forcément transitoire (disparait progressivement pour t > 0 si le système est stable)} \\ \checkmark \text{ La solution présente la même forme avant/après dérivation plusieurs fois} \end{array} \right.$$

- Seule une famille de fonctions respectent cette dernière propriété : la forme exponentielle complexe (A et p sont des valeurs complexes)

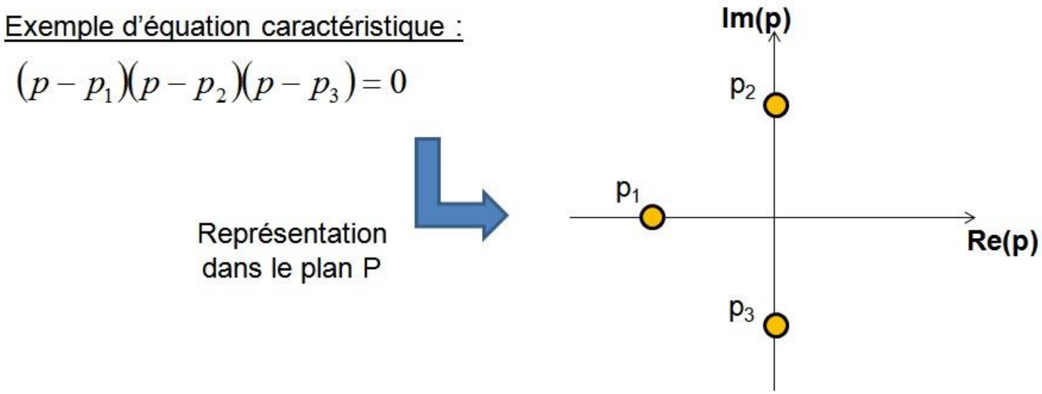
$$y_0(t) = A \cdot exp(pt)$$

Allure de la réponse naturelle si :

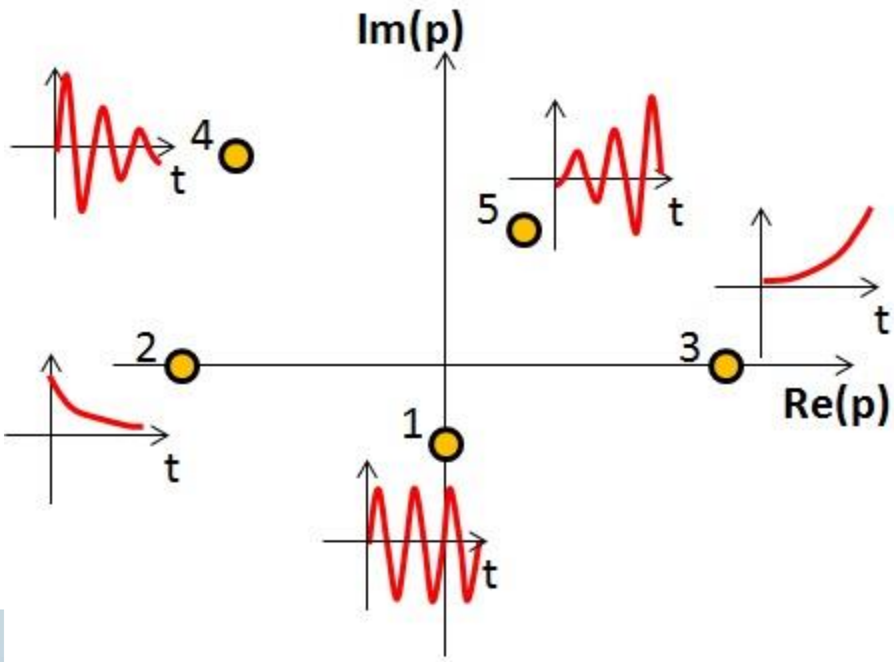
- ✓p purement réel et négatif ?
- ✓p purement réel et positif ?
- ✓p purement imaginaire ?
- ✓p un nombre complexe ?

Réponse naturelle d'un système LTI – Plan P

- Représentation graphique facilitant l'analyse de la réponse du système. Montre la position des fréquences naturelles dans le plan complexe.



- Le comportement du système (notamment sa stabilité) est uniquement liée à la position des fréquences naturelles dans le plan P.



Concepts de base

Réponse naturelle d'un système LTI

$$y_0(t) = A \cdot exp(pt) \Rightarrow \sum_{i=0}^{M} a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \cdot p^i = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{M} (p - p_i) = 0$$

Equation caractéristique du système (M caractérise l'ordre du système)

- **Solution générale :** $$y_0(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i \cdot exp(p_i \cdot t)$$

  - ✓ A_i : dépendent des **conditions initiales**
  - ✓ p_i : **fréquences naturelles** (complexes) **ou racines**, solutions de l'équation caractéristiques du système

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i$$

$$\Rightarrow y_0(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i exp(\sigma_i t) exp(j\omega_i t)$$

Coefficient d'atténuation ou d'amortissement

Pulsation ($\omega = 2\pi f$)

Amplitude complexe, vecteur de Fresnel ou phaseur

- Pourquoi représenter un signal réel à partir d'un nombre complexe ?
- Exemple :

$$x = \begin{cases} \hat{X} \cdot exp(p_x t) & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} Re[\hat{X} \cdot e^{p_x t)}] = |X| \cdot e^{\alpha t} \cdot cos(\omega t + \theta) & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\hat{X} = |X| \cdot exp(j\theta)$$

Amplitude complexe (ou phaseur)

$$p_x = \alpha + \mathrm{j}\omega$$

Fréquence complexe

Exemple : quel signal réel est représenté par : $(1+j)e^{(-2+j)t}$

Amplitude complexe, vecteur de Fresnel ou phaseur

$$(1+j)e^{(-2+j)t} \Rightarrow \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{(-2+j)t} = \sqrt{2}e^{-2t}e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

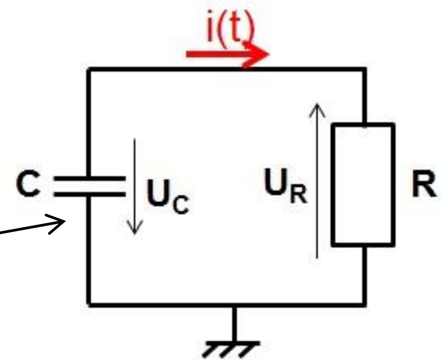
Partie réelle

$$\sqrt{2}e^{-2t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Fréquence complexe : $p = -2+j$

Réponse naturelle d'un système LTI – Exemple 1

- Circuit RC – évolution temporelle de i(t) pour t>0 ?



Le condensateur est initialement chargé ($U_C(0) = U_{C0}$).

1. On établit l'équation diff. générale du système (étude physique du système) :

$$U_R(t)+U_C(t)=0 \Longrightarrow Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t=0 \rightarrow \frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}i=0$$

2. On déduit la forme générale de la solution : $i(t) = Ae^{pt}$

3. On calcule les fréquences naturelles en dérivant l'équation caractéristique :

$$Ap\cdot e^{pt}+\frac{1}{RC}e^{pt}=0 \Longrightarrow p+\frac{1}{RC}=p-p_0=0$$

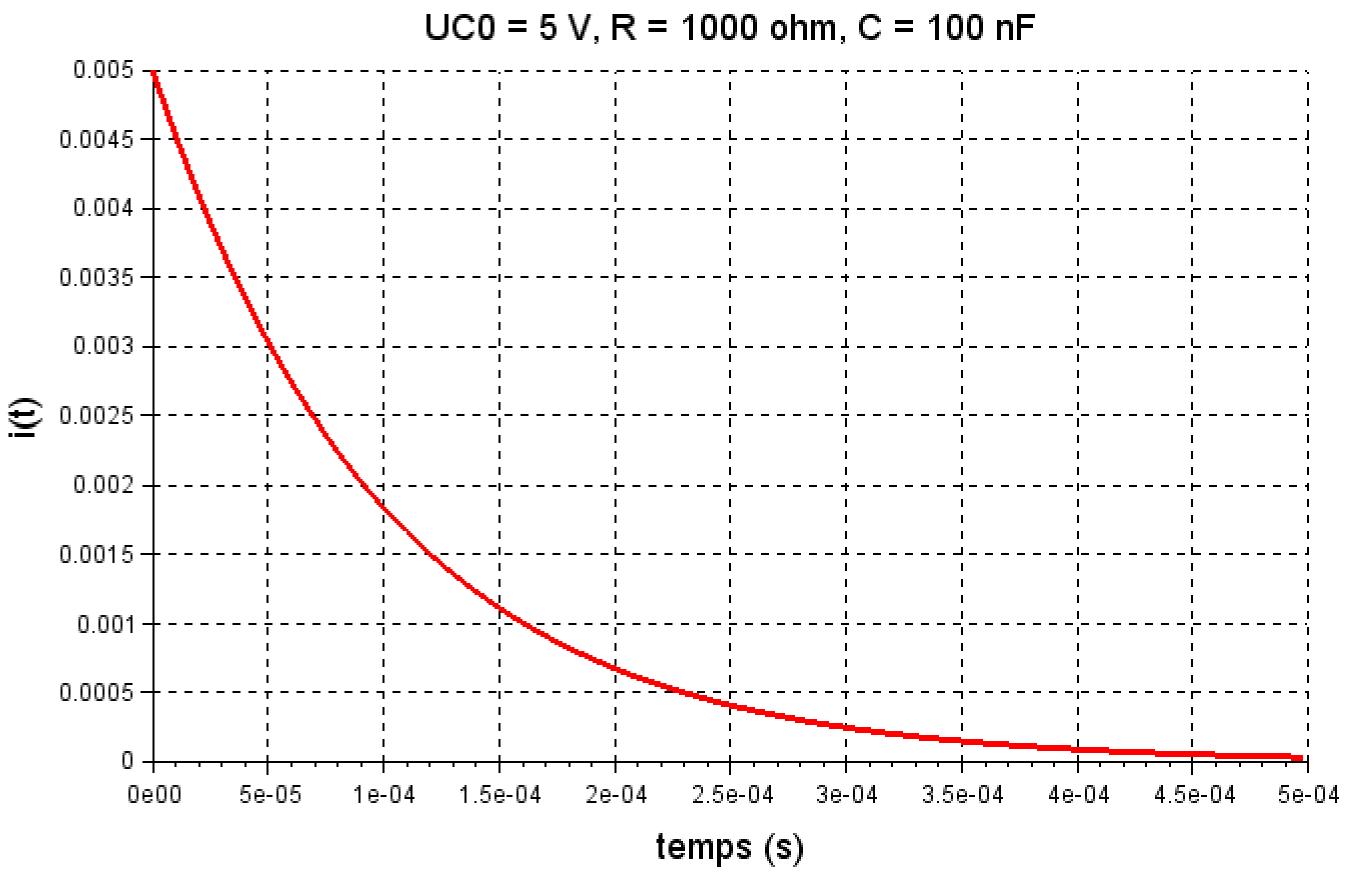
   - ✓ Une seule racine → système d'ordre 1
   - ✓ Fréquence naturelle p_0 = -1/RC, réel et négative → système stable

4. A est déterminé à l'aide de la condition initiale : $A = U_{C0}/R$

$$\Rightarrow \boxed{i(t)=\frac{U_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{rc}},\ t>0}$$

Réponse naturelle d'un système LTI – Exemple 1

$$i(t) = \frac{U_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{rc}}, \; t > 0$$



Réponse forcée d'un système LTI

- Excitation non nulle ($x(t) \neq 0$).
- La réponse forcée $y_f(t)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{N} b_j \times \frac{d^j x}{dt^j}$$

- Problèmes :
  - La forme de la réponse va dépendre de la celle de l'excitation
  - Comment trouver une méthode de résolution générique de cette équation différentielle, indépendante de la forme de l'excitation ?

⇒ **Peut-on identifier des types d'excitation dont la forme n'est pas modifiée par l'effet du système LTI ?**

Concepts de base

Réponse forcée d'un système LTI – Quelles excitations ?

➢ **Famille exponentielle complexe :**

$$x = \begin{cases} \hat{X} \cdot exp(p_x t) & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} Re[\hat{X} \cdot e^{p_x t)}] = |X| \cdot e^{\alpha t} \cdot cos(\omega t + \theta) & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\hat{X} = |X| \cdot exp(j\theta)$$

Amplitude complexe

$$p_x = \alpha + \mathrm{j}\omega$$

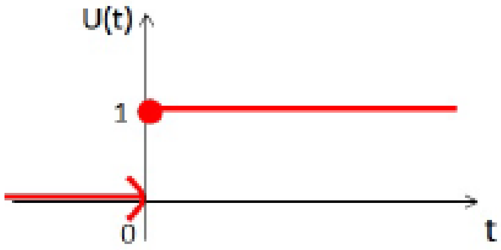
Fréquence complexe

Réponse forcée d'un système LTI – Quelles excitations ?

- **Famille impulsionnelle:**

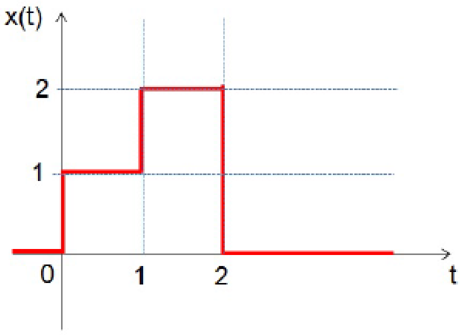
- Basé sur l'échelon unitaire ou fonction de Heaviside

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & si\ t > t_0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



- Pratique pour représenter des signaux causaux
- Base pour modéliser des signaux de formes plus complexes
- Exemple :

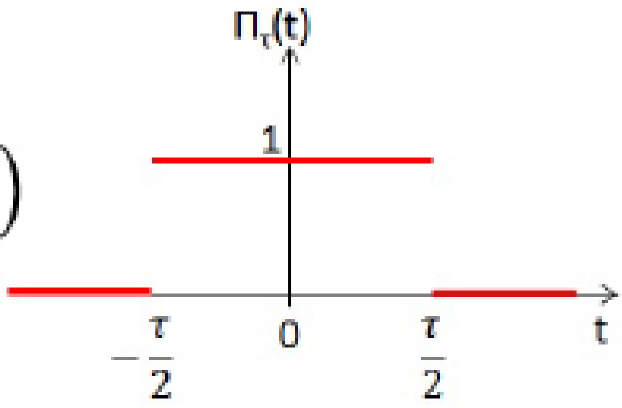
$$x(t) = U(t) + U(t-1) - 2U(t-2)$$



Réponse forcée d'un système LTI – Quelles excitations ?

➢ **Famille impulsionnelle – la fonction porte $\Pi_\tau(t)$**

$$\Pi_\tau(t) = \mathrm{u}\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{u}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

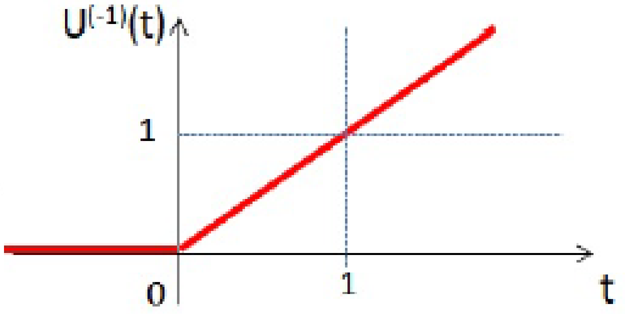


Réponse forcée d'un système LTI – Quelles excitations ?

- **Famille impulsionnelle:**

- L'intégration ou la dérivation de la fonction de Heaviside permet d'obtenir de nouvelles fonctions :
  - Une intégration → fonction rampe

$$u^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = t.u(t)$$



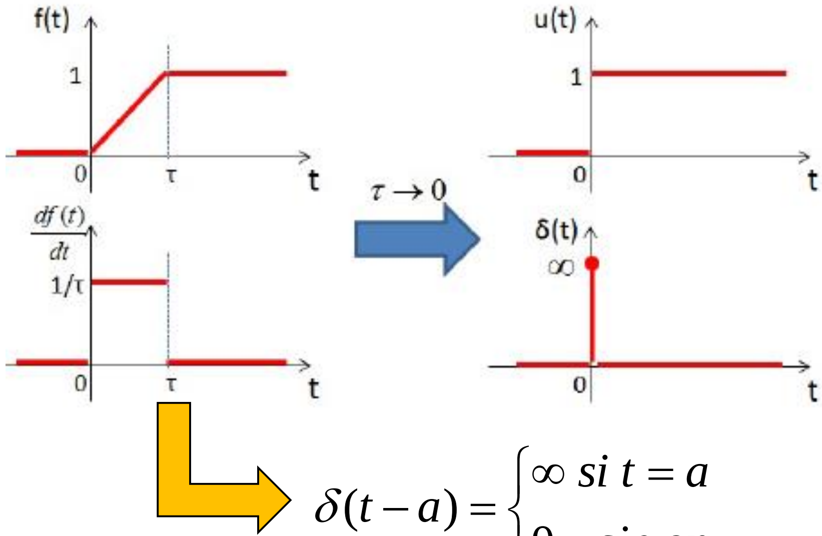
  - N intégrations → rampe polynomiale $u^{(-n)}(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$

  - **Si on la dérive ?**

Réponse forcée d'un système LTI – Quelles excitations ?

➢ **Impulsion ou distribution de Dirac**

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si\ t = a \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

➢ Nulle partout, sauf en 0 où apparait une singularité.

➢ Pas une fonction, mais une **distribution** !

➢ Uniquement utilisable à l'intérieur d'une intégrale

➢ Propriétés :

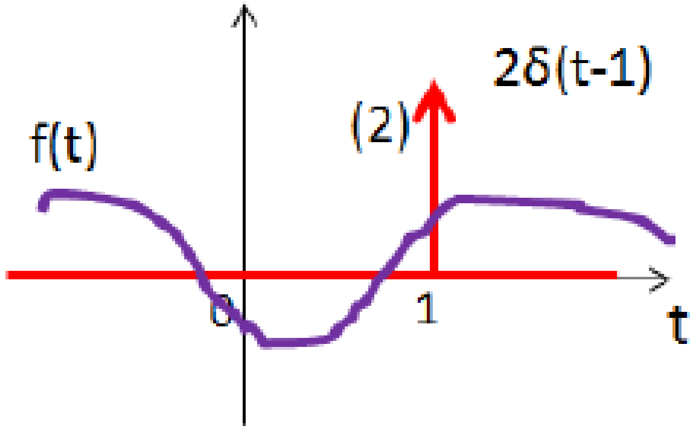
- **Energie finie** $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)dt = 1$

- **Propriété d'échantillonnage :** $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

Réponse forcée d'un système LTI – Quelles excitations ?

- **Impulsion ou distribution de Dirac**

- Représentation graphique typique



- **Intérêts de la famille impulsionnelle pour l'étude des systèmes LTI ?**

Réponse forcée d'un système LTI – Réponse impulsionnelle h(t)

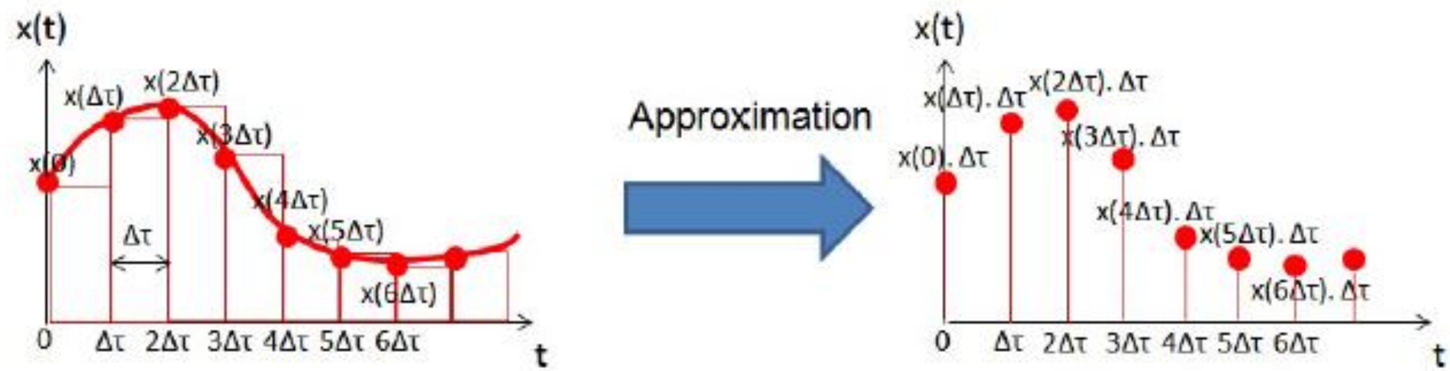
- Le système est excité par une impulsion de Dirac.

$$si\ x(t) = \delta(t) \ \rightarrow \ y_f(t) = h(t)$$

- Changement des conditions initiales → on retrouve la réponse naturelle.

$$si\ x(t) = \delta(t) \ \rightarrow \ y_f(t) = y_0(t)$$

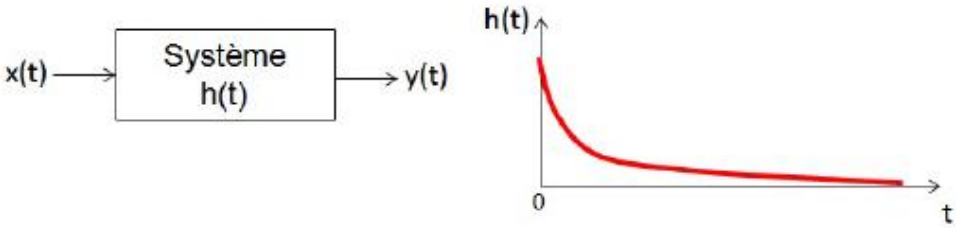
- Rôle majeur de la réponse impulsionnel :



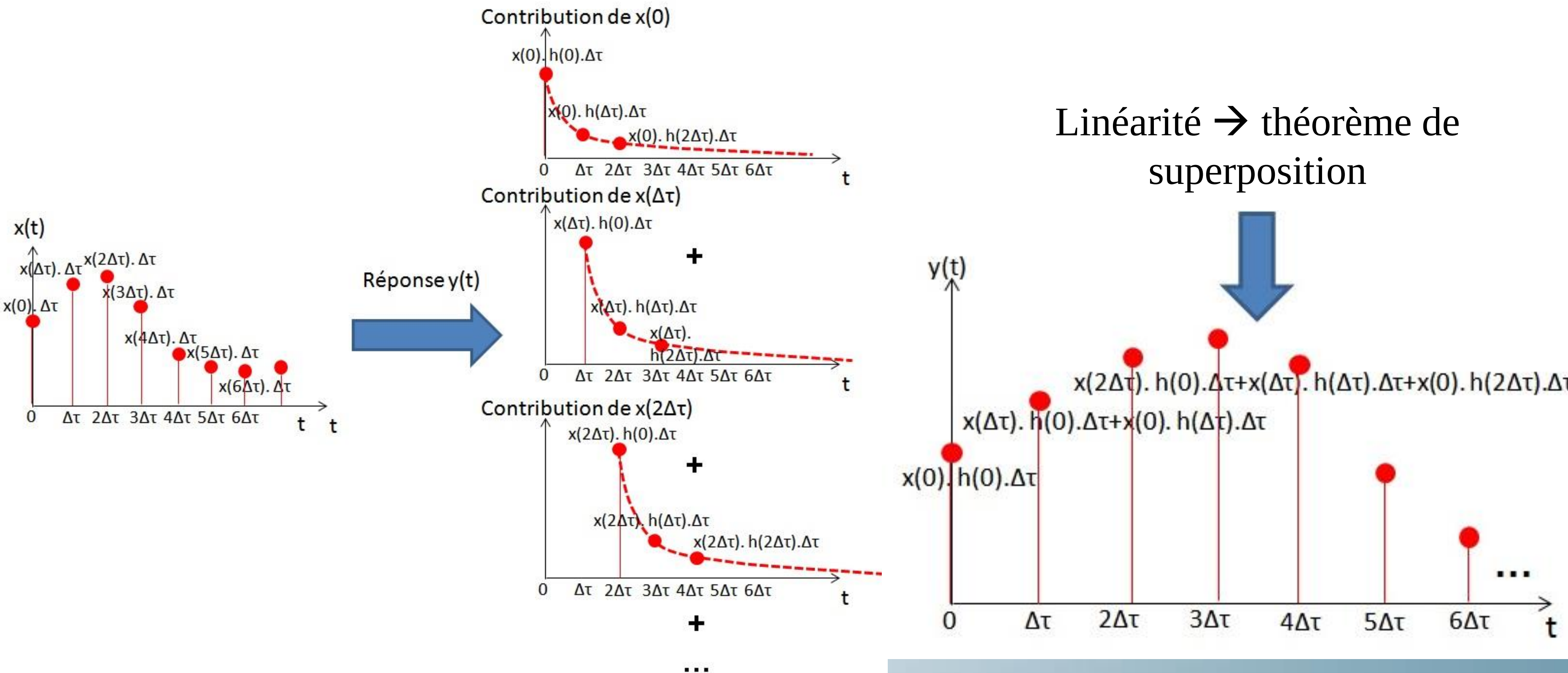
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau)\cdot\Delta\tau\cdot\delta(t-n\Delta\tau)$$

Réponse forcée d’un système LTI – Réponse impulsionnelle h(t)

- Le signal x(t) attaque un système LTI caractérisé par une réponse impulsionnelle h(t).



- Comment déterminer la réponse ?



Concepts de base

Réponse forcée d’un système LTI – Réponse impulsionnelle h(t)

- Relation complexe, basée sur un **produit de convolution** (symbole *) :

$$y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \Delta t \cdot h(t - n\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \mathrm{d}\tau = x * h(t)$$

La réponse d’un système LTI à n’importe quelle excitation peut être déterminée à partir de la réponse impulsionnelle, via un produit de convolution.

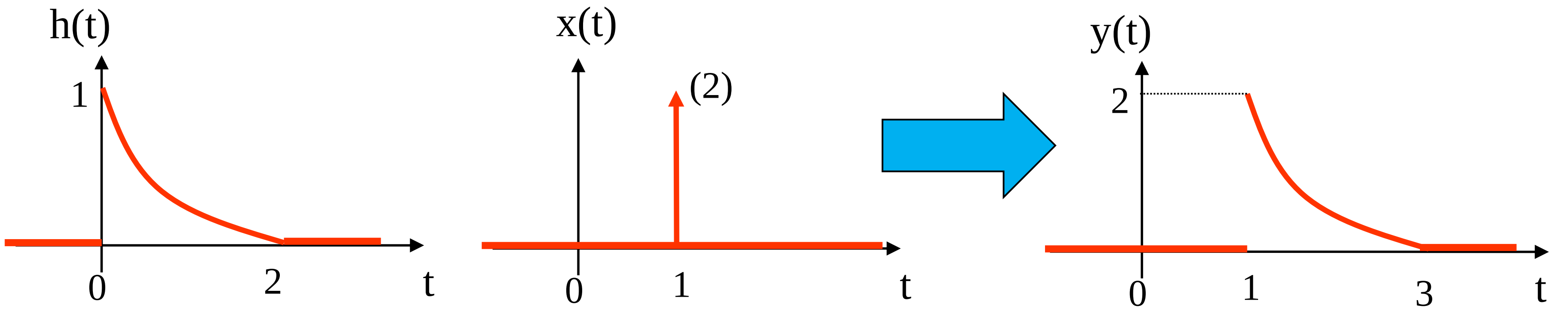
Réponse forcée d'un système LTI – Réponse impulsionnelle h(t)

- L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution (propriété d'échantillonnage du Dirac) :

$$y(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau = x(t)$$

$$y(t) = \delta(t-t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) x(t - t_0 - (\tau - t_0)) d\tau = x(t-t_0)$$

- Exemple : $y(t) = h * x(t) \; avec \; x(t) = 2\delta(t-1)$



$$y(t) = 2h(t-1)$$

Concepts de base

Réponse forcée d'un système LTI – Fonction de transfert H(p)

- L'excitation est une **exponentielle complexe** (en pratique, généralement un signal (co)sinusoïdal)

$$x(t) = Re[\hat{X} \cdot e^{pt}]$$

$$\Downarrow$$

$$y_f(t) = Re[\hat{Y} \cdot e^{pt}]$$

?

- La forme de la réponse est connue, seul le phaseur est inconnu.
- En repartant de l'équation diff. générale :

$$\sum a_i \cdot Re[p^i \cdot \hat{Y} \cdot exp(pt)] = \sum b_i \cdot Re[p^j \cdot \hat{X} \cdot exp(pt)] \Rightarrow \hat{Y} \cdot \sum a_i \cdot Re[p^i] = \hat{X} \cdot \sum b_i \cdot Re[p^j]$$

$$\Downarrow$$

M zéros

$$H(p) = \frac{Y}{X}(p) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}}(p) = \frac{\sum a_i \cdot Re[p^i]}{\sum b_i \cdot Re[p^j]} = G\frac{\prod_{i=1}^{M}(p-p_i)}{\prod_{j=1}^{N}(p-p_j)}$$

Fonction de transfert

N pôles = N fréq. naturelles

Concepts de base

Réponse forcée d’un système LTI – Régime harmonique

- **Cas d’une excitation (co)sinusoïdale ou harmonique : p = jω**
- On suppose donc que le système est en régime permanent (pas de phase transitoire)

$$\hat{Y}(p) = H(p) \cdot \hat{X}(p) = |H(p)||X(p)|e^{j(arg(H(p))+arg(\hat{X}(p)))}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = Re[|H(\omega)|X \cdot e^{j(\omega t+arg(H(p))+\Phi_x)}] = |H(\omega)|X \cdot cos(\omega t + arg(H(p)) + \Phi_x)$$

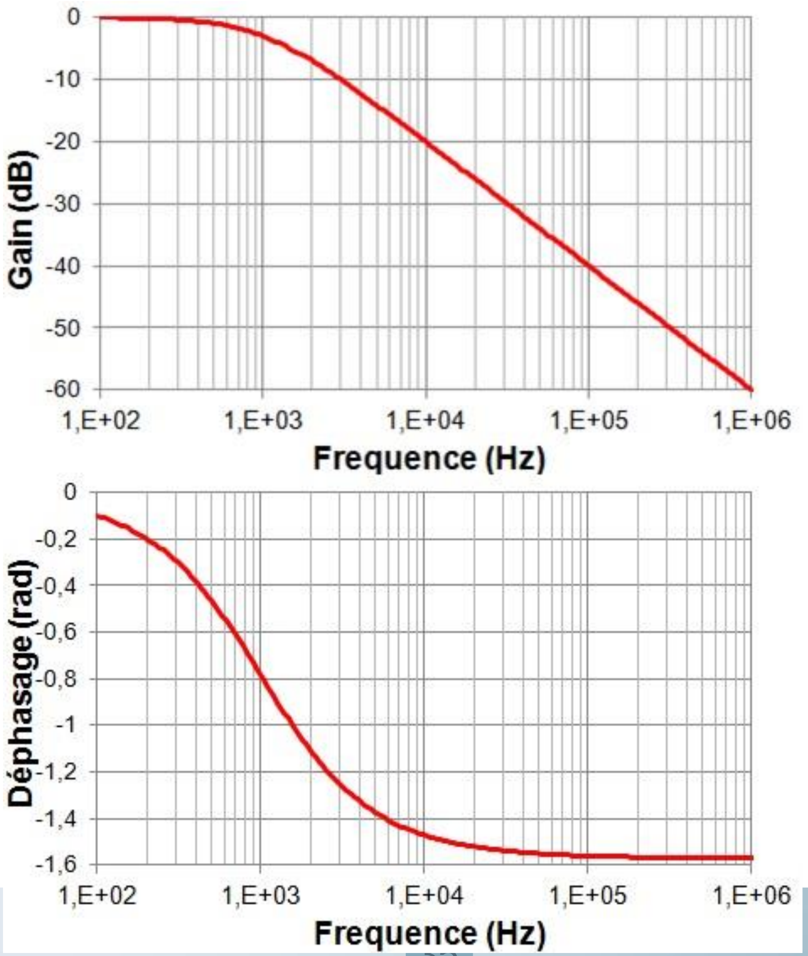
Gain du système à la pulsation ω

Déphasage du système à la pulsation ω

Lorsqu’un système LTI est excité par un signal (co)sinusoïdal de pulsation ω_0, la sortie est nécessairement un signal (co)sinusoïdal de pulsation ω_0, mais d’amplitude et de phase différentes

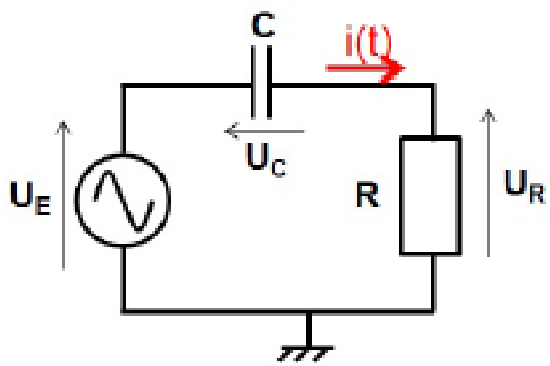
Réponse forcée d’un système LTI – Régime harmonique

- **Représentation usuelle gain / déphasage → Diagramme de Bode**
- Voir cours de remise à niveau d’électronique (ou chapitre 4 polycopié de cours)



Réponse forcée d'un système LTI – Exemple

- Circuit RC – évolution temporelle de $U_R(t)$ pour $t > 0$, sachant que:
  - C est chargé initialement ($U_c(0) = U_{C0}$
  - $U_E(t) = Xe^{pt}$ pour $t > 0$ et X l'amplitude complexe



- Réponse naturelle : $$U_{R0}(t) = Ri_0(t) = U_{C0}exp(-\frac{t}{RC}) \ , \ \ t > 0$$
- Réponse forcée (indépendante de la condition initiale, uniquement de l'excitation) :

1. On établit l'équation différentielle reliant les tensions d'entrée et de sortie :

$$U_E(t) = U_C(t) + U_R(t) \ \Rightarrow \ U_E(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + U_R(t) \ \Rightarrow \ U_E(t) = \frac{1}{RC}\int U_R(t)\mathrm{d}t + U_R(t)$$

Dérivation

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt}$$

Réponse forcée d'un système LTI – Exemple

2. Excitation exponentielle complexe → réponse exponentielle complexe !

$$U_{Rf}(t) = Ye^{pt}$$

$$pXe^{pt} = \frac{1}{RC}Ye^{pt} + pYe^{pt} \Rightarrow pU_E(t) = \frac{1}{RC}U_{Rf}(t) + pU_{Rf}(t)$$

3. Extraction de la fonction de transfert et analyse pôles/zéros

$$H(p) = \frac{U_{Rf}}{U_E}(p) = \frac{p}{p+\frac{1}{RC}} = \frac{p}{p+\omega_0}\ ,\ \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

4. Réponse forcée si excitation cosinusoïdale (p = jω) :

$$|H(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}} \quad et \quad Arg(H(\omega)) = \frac{\pi}{2} - atan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

$$\Rightarrow U_{Rf}(t) = |H(\omega)|cos(\omega t + Arg(H(\omega)))$$

Concepts de base

Réponse forcée d'un système LTI – Exemple

- Réponse complète = réponse naturelle + réponse forcée (excitation cos) :

$$\Rightarrow \; U_R(t) = U_{Rf}(t) + U_{R0}(t) = |H(\omega)| cos(\omega t + Arg(H(\omega))) + U_{C0} exp(-\frac{t}{RC})$$

Concepts de base

Calcul de la réponse d'un système LTI – Récapitulatif

Réponse impulsionnelle (ou indicielle)	Fonction de transfert
Calcul de la réponse temporelle du système à toute excitation, quelle que soit sa forme	Restriction du calcul de la réponse aux excitation de type exponentielle complexe
Calcul basé sur une opération compliquée (produit de convolution)	Calcul très simple (multiplication)
Analyse du comportement temporel possible	Analyse du comportement du système via l'analyse des pôles (fréquences naturelles)
Pas d'analyse fréquentielle	Analyse fréquentielle (harmonique), l'effet du système se résumant à un gain+déphasage