

Signal et Filtrage

INSA Toulouse - 2ème année IMACS

Alexandre Boyer, Pascal Acco, Léa Cot

2022 - 2023

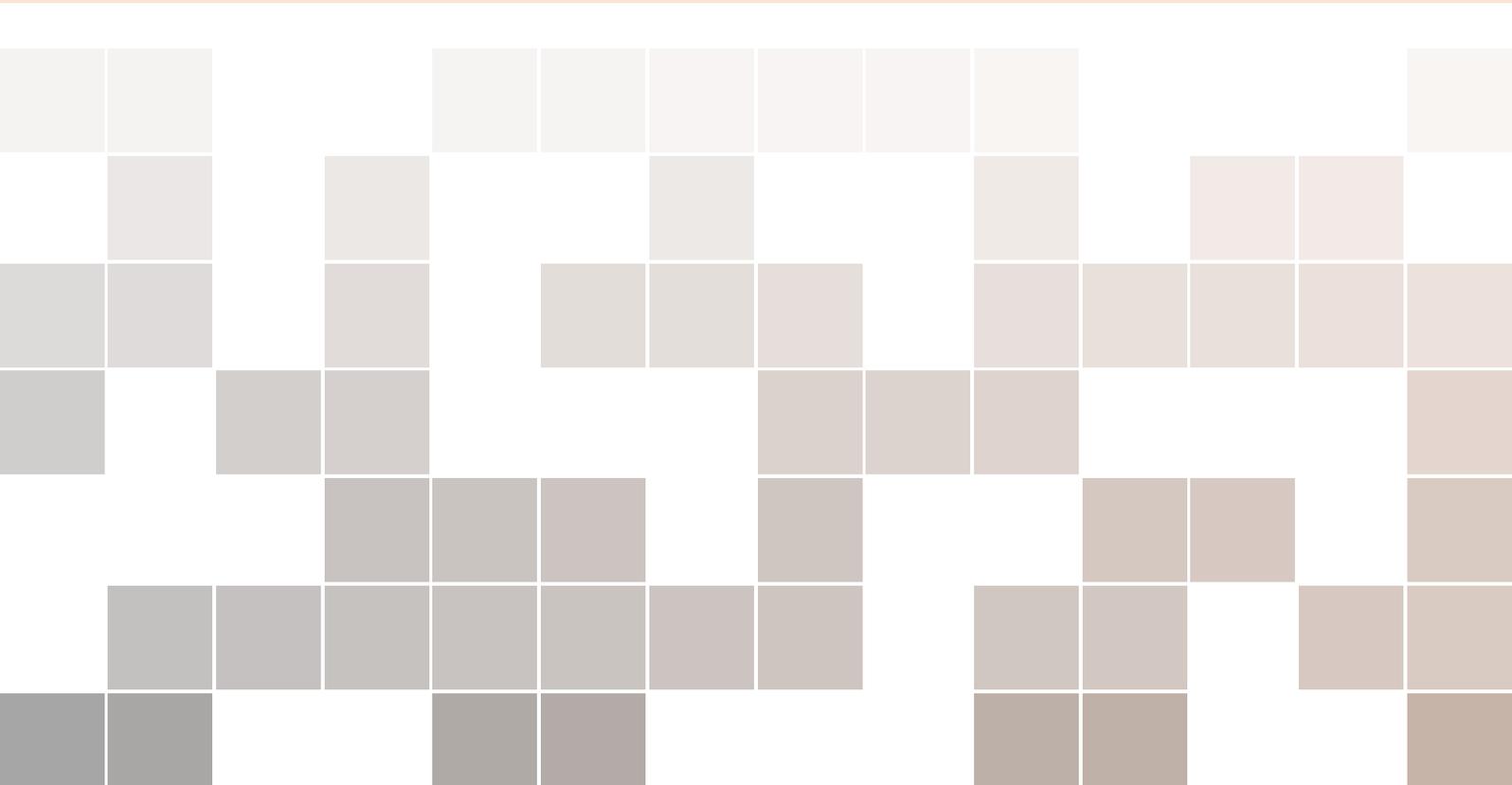


Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Le signal	9
1.1.1	Classification des signaux	9
1.2	Le traitement du signal	11
1.3	Les systèmes linéaires à temps invariant - Réponse d'un système à un signal	12
1.4	Les objectifs pédagogiques	13
1.5	Organisation du cours	14
1.6	Les outils numériques	15
2	Systèmes linéaires à temps invariant	17
2.1	Définition d'un système linéaire à temps invariant	17
2.1.1	Linéarité	17
2.1.2	Invariance temporelle	18
2.1.3	Passivité	19
2.1.4	Causalité	19
2.2	Equation générale d'un système linéaire	19
2.3	Réponse d'un système	19
2.4	Réponse naturelle d'un système LTI	20
2.4.1	Fréquences naturelles d'un système LTI	20
2.4.2	Plan p	21
2.4.3	Analyse du plan p - Stabilité du système	21
2.4.4	Ordre d'un système linéaire	22
2.5	Réponse forcée	25
2.5.1	Excitation exponentielle complexe	25

2.5.2	Famille d'excitations impulsionnelles	26
2.6	Les différents types de réponse caractérisant les systèmes LTI	29
2.6.1	Réponse impulsionnelle	29
2.6.2	Réponse indicielle	31
2.6.3	Réponse à une exponentielle complexe - Fonction de transfert	32
2.6.4	Calcul de la réponse d'un système dans le domaine temporel ou fréquentiel ?	34
2.7	Exercices	34
3	Transformée de Laplace	39
3.1	Transformation d'une fonction temporelle au domaine fréquentiel	40
3.2	Transformée de Laplace	41
3.2.1	Définition	41
3.2.2	Conditions d'existence de la transformée de Laplace et stabilité des systèmes	41
3.2.3	Pôles et zéros d'une fonction de transfert	43
3.3	Propriétés de la transformée de Laplace	43
3.3.1	Linéarité	43
3.3.2	Théorème du retard	43
3.3.3	Théorème du changement d'échelle	44
3.3.4	Translation dans le domaine fréquentiel	44
3.3.5	Dérivation dans le domaine temporel	44
3.3.6	Dérivation dans le domaine des fréquences complexes p	44
3.3.7	Intégration temporelle	45
3.3.8	Théorème de la valeur initiale	45
3.3.9	Théorème de la valeur finale	45
3.3.10	Multiplication et produit de convolution	45
3.3.11	Fonctions causales avec N répétitions	45
3.3.12	Fonctions périodiques causales	46
3.4	Transformée de Laplace des fonctions courantes	46
3.5	Transformée de Laplace inverse	47
3.5.1	Méthode pratique d'utilisation	48
3.5.2	Décomposition pôles-résidus	48
3.6	Applications	50
3.6.1	Résolution d'équations différentielles ordinaires	50
3.6.2	Calcul de la réponse transitoire d'un système linéaire	51
3.7	Exercices	53
4	Filtrage	57
4.1	Définition d'un filtre	58
4.1.1	Définition	58
4.1.2	Filtre à réponse impulsionnelle réelle	59
4.1.3	Fréquence négative	60
4.2	Analyse harmonique	60
4.3	Représentation - Diagramme de Bode	61
4.3.1	Diagramme de Bode	61
4.3.2	Tracé asymptotique du diagramme de Bode	63

4.4	Les principales caractéristiques d'un filtre	67
4.4.1	Gain	67
4.4.2	Fréquence(s) de coupure	68
4.4.3	Bande passante	68
4.4.4	Ordre du filtre	68
4.4.5	Fréquences de résonance et d'antirésonance	68
4.5	Les différents types de filtres	69
4.5.1	Filtre passe-bas d'ordre 1	69
4.5.2	Filtre passe-haut d'ordre 1	70
4.5.3	Filtre passe-bas d'ordre 2	70
4.5.4	Filtre passe-haut d'ordre 2	70
4.5.5	Filtre passe-bande d'ordre 2	72
4.5.6	Filtre coupe-bande d'ordre 2	72
4.5.7	Mise en cascade filtre	73
4.6	Exercices	73
5	Séries de Fourier - Analyse fréquentielle des signaux périodiques	77
5.1	Fonctions périodiques	77
5.2	Développement d'une fonction périodique sous la forme d'une série	78
5.2.1	Principe	78
5.2.2	Série de fonctions trigonométriques	79
5.3	Calcul des coefficients d'une série de Fourier	81
5.3.1	Forme trigonométrique	81
5.3.2	Forme polaire	83
5.3.3	Forme complexe	83
5.3.4	Somme partielle	84
5.4	Convergence des séries de Fourier - Théorème de Dirichlet	85
5.4.1	Continuité par morceaux	86
5.4.2	Classe C^1	86
5.4.3	Théorème de Dirichlet	86
5.5	Propriétés des séries de Fourier	87
5.5.1	Linéarité	87
5.5.2	Changement de période	87
5.5.3	Théorème du retard	87
5.5.4	Dérivée	88
5.5.5	Intégration	88
5.5.6	Egalités entre coefficients de Fourier	89
5.5.7	Symétries temporelles	89
5.5.8	Cas d'une suite d'impulsions de Dirac ou peigne de Dirac	90
5.6	Représentation en spectre de raies	91
5.6.1	Analyse spectrale d'un signal	92
5.7	Excitation d'un système linéaire par un signal périodique	93
5.8	Egalité de Parseval	93
5.9	Exercices	94

6	Transformée de Fourier	101
6.1	De la série de Fourier à la transformée de Fourier	101
6.2	Transformées de Fourier	103
6.3	Représentation du spectre	104
6.4	Exemples de calcul de transformée de Fourier	105
6.4.1	Fonctions porte et sinus cardinal	105
6.4.2	Impulsion de Dirac	107
6.4.3	Fonctions cosinus et sinus	107
6.5	Propriétés de la transformée de Fourier	108
6.6	Table de transformée de Fourier courante	108
6.7	Excitation d'un système linéaire par un signal périodique	108
6.8	Exercices	110
7	Analyse dans le domaine temporel	113
7.1	Réponse impulsionnelle	113
7.1.1	Définition	113
7.1.2	Extraction de la réponse impulsionnelle	114
7.2	Produit de convolution	115
7.2.1	Définition	115
7.2.2	Propriétés	115
7.2.3	Mise en œuvre du produit de convolution	116
7.2.4	Durée du produit de convolution	117
7.3	Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle	118
7.4	Modélisation de l'échantillonnage - Théorème de Shannon-Nyquist	121
7.4.1	Modélisation de l'échantillonnage	121
7.4.2	Impact de l'échantillonnage sur le spectre d'un signal	122
7.4.3	Théorème de Shannon-Nyquist	123
7.5	Exercices	124
8	Aspects énergétiques et corrélation	127
8.1	Définitions de la puissance et de l'énergie d'un signal	127
8.1.1	Puissance	127
8.1.2	Energie	128
8.1.3	Signaux à énergie/puissance finie	128
8.2	Calcul de la puissance dans le domaine fréquentiel	129
8.2.1	Densité spectrale d'amplitude	129
8.2.2	Cas des signaux périodiques - Egalité de Parseval	129
8.2.3	Cas des signaux non périodiques - Densité spectrale de puissance	130
8.3	Corrélation	131
8.3.1	Définition	131
8.3.2	Autocorrélation et intercorrélation	133
8.3.3	Propriétés de la corrélation	133
8.3.4	Exemples	136

8.4	Théorème de Wiener-Khintchine	138
8.5	Relations entre le signal, la densité spectrale de puissance et l'autocorrélation	140
8.6	Transfert d'énergie à travers un système linéaire	141
8.7	Exercices	141
9	Annexe A - Rappels mathématiques	145
9.1	Intégration et dérivation	145
9.1.1	Dérivée	145
9.1.2	Primitives et intégrales	146
9.2	Rappels de trigonométrie	148
9.3	Nombres complexes	151
9.3.1	Principales propriétés	151
9.3.2	Interprétation géométrique	151
9.4	Représentation complexe des signaux (co)sinusoïdaux : exponentielle complexe et phaseur	152
9.4.1	Représentation complexe des signaux sinusoïdaux et vecteur de Fresnel	153
9.4.2	Exponentielle complexe	153
9.4.3	Phaseur	155
9.5	Exercices d'entraînement	157
10	Annexe B - Algorithmes de calcul	159
10.1	Représentation numérique d'un signal à temps continu	160
10.2	Calcul numérique d'une intégrale	161
10.3	Algorithme de décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier	163
10.4	Extension au calcul de la transformée de Fourier d'un signal	164
10.5	Calcul numérique du produit de convolution de deux fonctions à supports temporels finis	164
10.6	Calcul numérique de la fonction de corrélation de deux fonctions à supports temporels finis	167

1. Introduction

Ce cours est une introduction aux concepts et aux outils mathématiques de base de l'analyse des signaux et des systèmes linéaires. Nous précisons aussi les conditions d'utilisation de ces outils. Même si ils sont centraux dans le traitement du signal, ils sont indispensables dans d'autres disciplines comme l'électronique, l'automatique, la mécanique, les télécommunications ... En effet, les concepts de systèmes et de signaux sont suffisamment généraux pour s'adapter à des domaines différents. La puissance des notions et des outils que nous présenterons dans ce cours est qu'ils peuvent s'appliquer à des domaines, des grandeurs et des objets physiques complètement différents. Ils constituent des outils largement répandus et utilisés non seulement en ingénierie, mais aussi en recherche. Les concepts vus dans ce cours seront donc utilisés dans les autres enseignements de la 2e année IMACS, mais aussi des prochaines années, et certainement durant toute votre carrière !

Dans ce premier chapitre, nous allons définir les notions de signal, de traitement de signal et de système dit linéaire à temps invariant. Nous terminerons par une présentation des objectifs pédagogiques du cours, de son organisation et des outils utilisés.

1.1 Le signal

Dans ce cours, on entend par signal tout phénomène physique qui transporte une information. Il indique l'évolution temporelle, spatiale, d'une ou plusieurs quantités associées à un phénomène physique. Par exemple, il peut s'agir du signal électrique transmis sur un câble réseau ou une onde électromagnétique associée à un réseau WiFi. Les vibrations mécaniques produits par un véhicule, une onde radar, la vitesse de rotation d'un moteur, la température d'une pièce mesurée par un capteur ou un flux de bits lus depuis une mémoire constituent aussi des signaux. Le signal est donc une notion générique provenant de sources physiques très différentes. Pour que ces signaux puissent être traités et analysés, il faut qu'ils soient mesurés. Pour cette raison, ils sont souvent convertis en signaux électriques.

1.1.1 Classification des signaux

Selon sa nature, le phénomène physique, dont le signal constitue la signature, peut être exprimé par une fonction mathématique évoluant en fonction d'une ou plusieurs variables. Les plus

courantes sont des variables spatio-temporelles. Dans ce cours, nous traiterons principalement de signaux temporels, c'est-à-dire que leur évolution ne dépend que du temps, que nous notons $s(t)$. Nous pourrions traiter de la même manière des signaux dépendant d'une ou plusieurs variables spatiales, auxquelles on pourrait aussi ajouter le temps. Considérons que le signal dépend du temps. Nativement, il est exprimé dans le domaine temporel, c'est-à-dire que nous pouvons décrire son évolution par une fonction dépendante du temps. Nous verrons dans ce cours qu'il est possible, via des transformations mathématiques, l'exprimer dans un domaine dual, facilitant ainsi son étude ou l'étude du système qu'il attaque ou dont il est issu.

Bien que le signal constitue une notion générique qui se ramène à une fonction mathématique, il présente plusieurs caractéristiques que nous allons rapidement présenter.

Signaux réels ou complexes

Les signaux physiques sont des signaux réels, c'est-à-dire que les valeurs prises par la fonction $s(t) \in \mathbb{R}$. Cependant, rien n'empêche de définir un signal complexe, dont les valeurs appartiennent à l'ensemble des complexes. L'utilisation des nombres complexes permet la résolution efficace de nombreux problèmes associés à des systèmes physiques.

Signaux déterministes ou aléatoires

Un signal déterministe présente une évolution parfaitement prédictible. En d'autres termes, on dispose d'un modèle, d'une fonction mathématique permettant de prédire à coup sûr la valeur du signal à un instant donné. *A contrario*, un signal aléatoire n'est pas prédictible. On peut disposer d'un modèle mathématique décrivant l'évolution du signal, mais on ne peut pas prédire exactement la valeur prise à un instant donné. Il faut noter que la plupart des signaux sont aléatoires : il y a toujours une part d'incertitude dans les phénomènes physiques et les modèles que l'on bâtit pour les étudier sont parfois des approximations. En outre, un signal déterministe n'apporte pas d'informations puisqu'on sait le prédire.

Le signal déterministe est souvent une abstraction mathématique que l'on rencontre rarement.

Malgré la nature aléatoire des signaux, nous nous focaliserons uniquement sur des signaux déterministes dans ce cours. Ceux-ci constituent une abstraction mathématique efficace pour étudier les signaux lorsque la nature aléatoire est négligeable. De plus, cela évite l'introduction d'outils statistiques qui compliquerait inutilement ce cours. Les signaux aléatoires seront abordés en 3e année IMACS.

Temps continu ou discret

Les signaux physiques présentent une évolution continue en fonction du temps ou de l'espace. Avec l'avènement des systèmes de traitement numérique, l'acquisition de ces signaux requiert de ne prélever qu'un nombre fini d'"échantillons" de ce signal. Un échantillon correspond à une valeur prise par le signal à un instant donné. On parle d'échantillonnage. En d'autres termes, le temps est discrétisé. Cet échantillonnage est généralement effectué régulièrement, selon une période dite d'échantillonnage. On parle alors de signaux à temps discret. En effet, un système de traitement numérique met un temps fini pour effectuer une opération. Pendant ce temps, le signal doit rester fixe, d'où la nécessité de ne traiter qu'un échantillon. De plus, le traitement numérique passe très souvent par la mémorisation. Or, une mémoire numérique présente un nombre fini de "cases mémoires". La différence entre signaux à temps continus et à temps discrets est illustrée dans la figure 1.1.

Dans ce cours, nous ne traiterons que des signaux à temps continu. L'effet de l'échantillonnage sur les signaux sera abordé en 3e année IMACS.

Signaux à valeurs continues ou discrètes

La plupart des signaux physiques peuvent prendre une infinité de valeurs à l'intérieur d'une certaine intervalle. On parle alors de signaux à valeurs continues. Cependant, dès qu'un signal doit

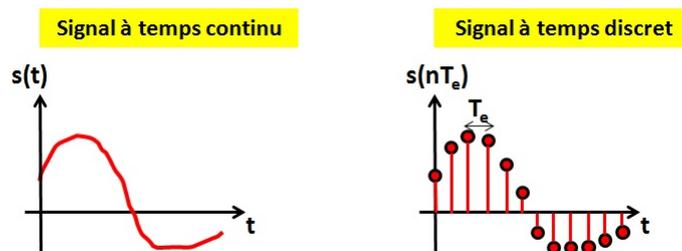


FIGURE 1.1 – Signal à temps continu et à temps discret

être traité par un système numérique, celui-ci doit d'abord être encodé sur un nombre fini de bits. Il en résulte un nombre fini d'états que peut prendre le signal. On parle de signal à valeurs discrètes.

En électronique, on distingue ainsi les signaux analogiques, à valeurs et à temps continus, des signaux numériques, à valeurs et à temps discrets.

Signaux mono-dimensionnels ou multidimensionnels

Un signal peut apporter une information sur l'évolution d'une variable ou de plusieurs variables. Par exemple, le signal peut être l'évolution de la position dans l'espace d'un objet. Le signal contiendra trois variables. De même, un signal peut dépendre d'une ou de plusieurs variables caractérisant son évolution : le temps, l'espace. Dans ce cours nous ne considérerons que des signaux à une dimension.

1.2 Le traitement du signal

Le but du traitement de signal est l'analyse et la transformation des signaux en fonctions mathématiques ou paramètres afin d'en extraire l'information. Elle forme une discipline à part entière, et est largement employée dans d'autres domaines, tels que l'électronique, l'automatique, les télécommunications, la thermodynamique, etc. Elle est en lien avec les mathématiques mais aussi avec le développement de nouveaux moyens de calcul et de traitements numériques. Ses finalités sont nombreuses, on peut citer, entre autres :

- l'analyse, c'est-à-dire l'extraction des composantes essentielles portant l'information utile
- la mesure, ou l'estimation de grandeurs caractéristiques
- la détection et la reconnaissance de signaux, d'informations enfouis
- le filtrage, c'est-à-dire l'élimination des composantes "parasites" d'un signal
- la restauration d'un signal, liée au processus de filtrage
- la synthèse de signaux
- le codage, la compression

Dans ce cours, nous aborderons les outils mathématiques de base d'analyse des signaux. Il s'agit de transformation permettant d'extraire des informations utiles d'un signal. Nous allons notamment aborder l'analyse fréquentielle du signal via la transformée de FOURIER. Celle-ci vise à identifier les différentes composantes dites harmoniques qui constituent un signal. L'analyse directe du signal dans le domaine temporel ne permet pas de séparer facilement l'ensemble de ces composantes. L'analyse fréquentielle du signal est souvent l'opération préalable du filtrage, dont le but est l'élimination de signaux indésirables. Bien que son effet soit visible sur l'évolution temporelle d'un signal, un filtre est dimensionné à partir de l'analyse fréquentielle de ce signal.

C'est ce qu'illustre la figure 1.2. L'évolution temporelle montre un signal complexe, difficilement analysable. L'utilisation d'une transformation mathématique, telle que la transformée de FOURIER, met en évidence la présence de plusieurs composantes spectrales, à des fréquences harmoniques, qui forment le signal.

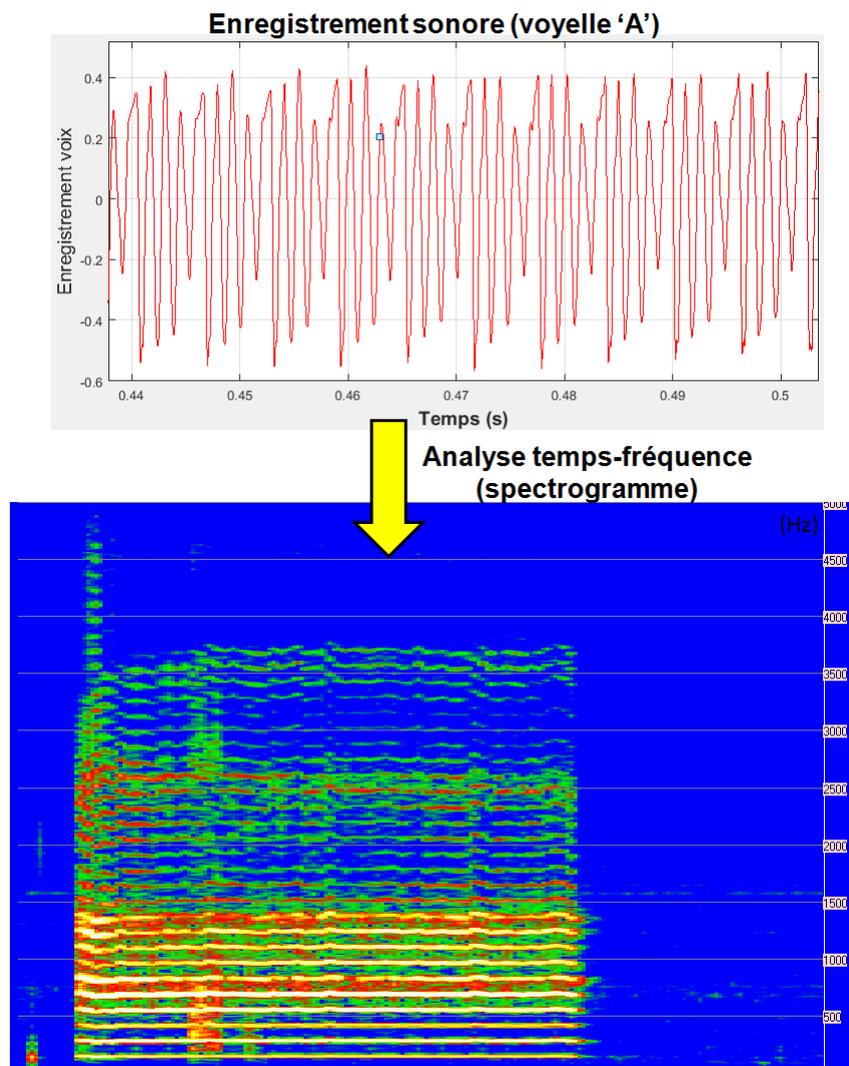


FIGURE 1.2 – Analyse spectrale de la voix (Logiciel Vocalab, avec la permission d'Etienne Sicard).

Dans ce cours, la transformée de FOURIER ne sera vue que pour des signaux à temps continus. L'impact de l'échantillonnage (ou discrétisation) du signal et sur la transformée de FOURIER sera abordé en 3e année IMACS.

1.3 Les systèmes linéaires à temps invariant - Réponse d'un système à un signal

Ce cours a aussi pour but l'étude des systèmes, c'est-à-dire la manière dont ils répondent à un signal d'entrée. Un système est un concept très générique. Ici, nous ne nous intéressons pas à la nature du système et à la compréhension physique de son fonctionnement. Nous pourrions traiter de systèmes électriques, mécaniques, optiques, chimiques, ... Nous entendons par système le modèle mathématique, abstrait, associé à un objet physique qui décrit son fonctionnement. Il peut être vu comme une "boite" excitée sur son ou ses entrées par un ou plusieurs signaux, comme le montre la Fig. 1.3. L'évolution de sa ou de ses sorties, que l'on appelle réponse, dépend non seulement du signal d'entrée mais aussi des propriétés du système. Ses signaux d'entrée et de sortie peuvent être représentés par des fonctions mathématiques $x(t)$ et $y(t)$. Du point de vue du traitement du signal,

un système transforme les signaux. Son effet peut être modélisé par un opérateur mathématique L . Le but de ce cours est de présenter les outils mathématiques permettant de modéliser le système (comment extraire cet opérateur) et de prédire la réponse du système à une excitation donnée. L'objectif est de déterminer un outil mathématique général, fournissant une même méthode de calcul quelle que soit la nature physique du système.

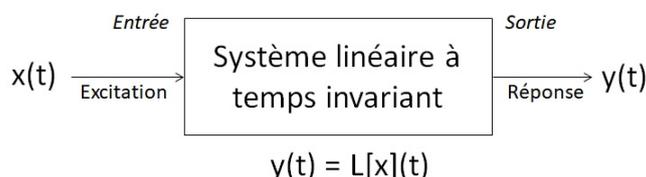


FIGURE 1.3 – Représentation d'un système LTI comme une boîte noire reliant les signaux d'entrée et de sortie par un opérateur linéaire

Dans ce cours, nous traiterons d'une classe de systèmes particuliers, appelés systèmes linéaires à temps invariants (LTI). Les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont reliés entre eux par un ou plusieurs opérateurs linéaires, dont les caractéristiques n'évoluent pas au cours du temps. Si elles sont connues, il devient alors possible de prédire la réponse en sortie du système quelle que soit l'excitation appliquée en entrée. Pour cela, il nous faut déterminer une représentation mathématique de l'effet de ce système, quelle que soit la nature réelle du système. Nous en présenterons deux : l'effet du système LTI sera modélisé par sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert. Les outils mathématiques permettant le calcul de sa réponse seront la transformée de LAPLACE et le produit de convolution.

Comme pour l'analyse fréquentielle, nous ne considérerons que des systèmes à temps continu. Quasiment tous les systèmes ont une évolution continue dans le temps. Cependant, certains d'entre eux se modélisent efficacement en considérant une échelle de temps discrète. C'est notamment le cas pour les circuits électroniques numériques synchrones, dont le fonctionnement logique est cadencé par une horloge périodique. Les concepts présentés dans ce cours devront être adaptés à cette discrétisation du temps. Ces concepts seront abordés en 3e année IMACS.

1.4 Les objectifs pédagogiques

L'objectif du cours est le suivant : présenter les concepts et les outils de base de l'analyse du signal, ainsi que ceux pour le calcul de la réponse des systèmes linéaires à temps invariant.

À l'issue du cours, vous devrez :

- (re)connaître les différents types de signaux ;
- Calculer le développement en série de FOURIER d'un signal périodique et exprimer les coefficients sous ses différentes formes ;
- savoir tracer et interpréter une représentation graphique des coefficients de FOURIER ;
- calculer la transformée de FOURIER (inverse) d'un signal ;
- énoncer les principales propriétés de la transformée de FOURIER ;
- calculer la puissance, l'énergie d'un signal ;
- énoncer les propriétés d'un système linéaire à temps invariant ;
- expliquer les notions de réponses naturelles, forcées et d'excitation d'un système naturel, de fréquence naturelle ;
- connaître les principales familles d'excitation pour l'analyse des systèmes linéaires (exponentiel complexe, impulsionnelle) ;
- calculer la réponse temporelle d'un système linéaire à partir de la transformée de LAPLACE (inverse) ;

- énoncer les principales propriétés de la transformée de LAPLACE ;
- déterminer la réponse harmonique d'un système linéaire à partir de sa fonction de transfert ;
- mettre en œuvre le produit de convolution pour calculer la réponse temporelle d'un système ;
- déterminer les caractéristiques des filtres linéaires (type, ordre, fréquences de coupure) ;
- tracer les caractéristiques d'un filtre dans le diagramme de BODE ;
- calculer la corrélation entre deux signaux ;
- déterminer la densité spectrale de puissance d'un signal à partir de son auto-corrélation.

1.5 Organisation du cours

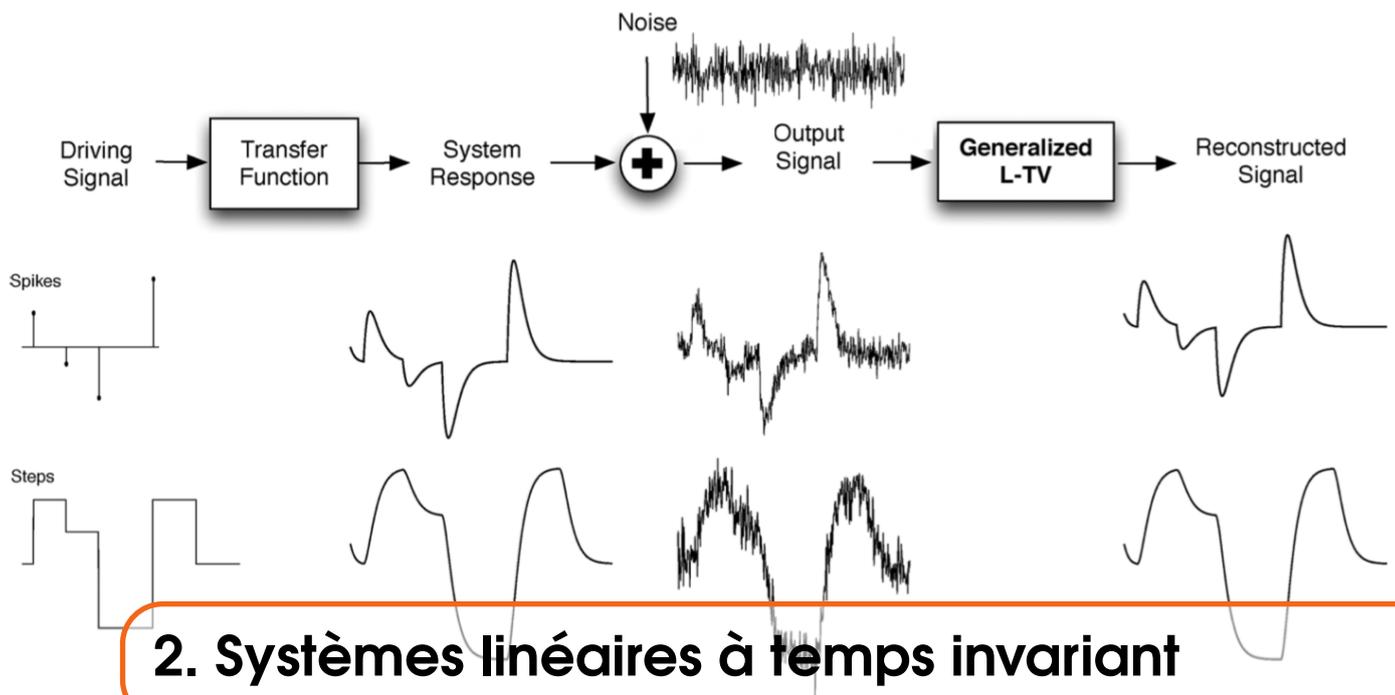
Ce cours s'organise de la manière suivante :

- Nous commençons par l'étude des systèmes linéaires. Le chap. 2 est dédié à la définition des propriétés des systèmes LTI, des concepts d'excitation et de réponse. Un préalable au calcul de la réponse d'un système est la recherche de type d'excitations qui facilite cette tâche. Nous mettons en évidence deux types de familles d'excitation : exponentielle complexe et impulsionnelle. Elles permettront de définir deux manières complémentaires de modéliser un système : dans le domaine temporel par la réponse impulsionnelle, et dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert.
- Le chap. 3 est consacré à la transformée de LAPLACE. Cet outil, qui transforme une fonction mathématique temporelle en une nouvelle fonction exprimée dans le domaine des fréquences complexes, fournit un moyen très efficace pour calculer la réponse transitoire des systèmes LTI, quelle que soit l'excitation appliquée en entrée.
- Le filtrage est abordé dans le chap. 4. Les filtres sont des systèmes LTI comme les autres. La spécificité vient de leur utilisation : l'élimination de composantes fréquentielles indésirables contenues dans un signal. Le dimensionnement d'un filtre passe par une analyse de sa fonction de transfert. Le chapitre présente un outil graphique adapté à l'analyse d'un filtre : le diagramme de BODE, ainsi que le vocabulaire associé à la caractérisation des filtres.
- Le chap. 5 présente la décomposition d'un signal périodique en une série de termes (co)sinusoïdaux, appelée série de FOURIER. Celle-ci forme la base de l'analyse fréquentielle du signal. Après une description des différentes formes prises par la série, les principales propriétés des séries de FOURIER sont présentées. Plusieurs exemples de décomposition de signaux en série de FOURIER sont donnés. Une représentation du signal en spectre de raies est aussi introduite, fournissant un outil d'analyse graphique puissant.
- Les séries de FOURIER constituent un formidable outil pour l'analyse des signaux, mais ils sont limités aux signaux périodiques. La transformée de FOURIER constitue une extension pour une classe de signaux non-périodiques. Le chap. 6 est dédié à la présentation de la transformée de FOURIER et son application. Le chapitre montre aussi que la transformée de FOURIER est un cas particulier de la transformée de LAPLACE.
- Le chap. 7 revient sur le calcul de la réponse temporelle des systèmes. Ce point abordé dans le chap. 3 passait par la transformation du signal dans le domaine fréquentiel, via la transformée de LAPLACE. Dans ce chapitre, on montre comment ce calcul peut être fait directement dans le domaine temporel. Celui-ci nécessite la mise en œuvre du produit de convolution.
- Dans le dernier chapitre, nous revenons sur les concepts de puissance et d'énergie des signaux. Nous présentons les méthodes de calcul dans les domaines temporels et fréquentiels. Nous introduisons un autre outil fondamental pour l'étude de la ressemblance des signaux : la corrélation. Elle présente aussi un autre intérêt majeur : sa connaissance permet de déterminer la densité spectrale de puissance d'un signal, donnant la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel.
- Deux annexes sont proposées à la fin de ce document. La première fait un rappel des concepts mathématiques requis pour la mise en œuvre pratique des outils de calcul présentés dans

ce cours (intégrale, dérivée, relations trigonométriques, nombres complexes, exponentielle complexe). Des exercices d'entraînement sont aussi proposés. La deuxième annexe présente des algorithmes permettant le calcul numérique de la décomposition en série de Fourier, de la transformée de Fourier, du produit de convolution et de la fonction de corrélation. Ces algorithmes seront mis en œuvre pendant les séances de travaux pratiques.

1.6 Les outils numériques

L'analyse des systèmes et le traitement du signal met en œuvre des calculs potentiellement complexes, ne pouvant pas être toujours résolus à la main voire analytiquement. Des outils numériques sont donc requis. Dans les TD et TP associés à ce cours, nous travaillerons avec Matlab[®], outil de référence pour le calcul numérique et le traitement du signal notamment (fr.mathworks.com). Celui-ci est disponible dans toutes les salles d'informatique de l'INSA. Cependant, il fonctionne avec une licence payante. Un équivalent gratuit, quasiment entièrement compatible, est le logiciel Octave (www.gnu.org/software/octave/). Vous pourrez le télécharger et l'installer sur vos machines personnelles.



2. Systèmes linéaires à temps invariant

Le but de ce chapitre est de présenter les concepts de base indispensables à l'étude des systèmes linéaires à temps invariants (LTI) et des signaux. Après une définition des critères qui caractérisent un système LTI, nous chercherons à répondre à la question suivante : comment déterminer efficacement la réponse d'un système linéaire lorsqu'il est soumis à une excitation quelconque ? Par efficacité, nous entendons :

- méthode mathématiquement "simple" ;
- méthode indépendante de l'excitation et des propriétés du système LTI.

Pour cela, nous commencerons par nous interroger sur la manière de représenter l'interaction entre l'entrée et la sortie d'un système, puis sur les notions d'excitation et de réponse. Nous distinguerons les notions de réponses naturelles et forcées, avant d'identifier deux familles d'excitation adaptées à l'étude des systèmes : exponentielle complexe et impulsionnelle. Nous introduirons ensuite la notion de fréquence (complexe), qui nous offrira la possibilité d'étudier les signaux temporels dans le domaine fréquentiel, ainsi que la notion de fonction de transfert qui facilitera l'étude des systèmes.

2.1 Définition d'un système linéaire à temps invariant

2.1.1 Linéarité

Un système relie à chaque signal d'entrée x un signal de sortie unique y . Les signaux x et y sont des fonctions de la variable réelle appartenant à un espace de fonctions le plus général possible noté ici L_E . La relation entrée-sortie est donc modélisée par une application mathématique de L_E dans L_E notée L et définie ainsi :

$$L: \begin{array}{l} L_E \longrightarrow L_E \\ x: t \mapsto x(t) \longmapsto y: t \mapsto y(t) \end{array} \quad (2.1)$$

R Remarquons que l'application L transforme une fonction en une fonction et que cela peut compliquer les notations, aussi il est courant de voir utiliser les crochets $[]$ autour des fonctions

arguments de l'application L et les simples parenthèses autour de la variable réelle argument d'une fonction. Ce genre d'application est souvent désignée par le terme d'*opérateur*.

Beaucoup d'abus de notation figurent dans la littérature, gardons à l'esprit et tentons cette année encore de conserver une rigueur d'écriture irréprochable pour garder les idées claires. Parmi les deux notations présentées ci-dessous, on privilégiera la première (2.2), plus rigoureuse même si plus lourde. La seconde (2.3), plus simple dans le cadre d'une utilisation pratique, reste correcte. Elle n'est conseillée que lorsque les concepts d'applications et d'opérateurs mathématiques sont maîtrisés.

$$t \mapsto y(t) = L[t \mapsto x(t)] \quad (2.2)$$

$$y(t) = L[x](t) \quad (2.3)$$

Une classe de système fondamentale est celle des systèmes linéaires car elle offre de nombreux outils et propriétés mathématiques.

Definition 2.1.1 Système linéaire : Une système est dit linéaire si et seulement si l'application L associée est linéaire, soit pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda) \in L_E^4 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad L[x_1 + \lambda x_2](t) &= y_1(t) + \lambda y_2(t) \\ \text{ou bien} \quad L[x_1 + \lambda x_2] &= L[x_1] + \lambda L[x_2] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Autrement dit, si le système est linéaire, la réponse y à une excitation x correspondante à la somme pondérée des excitations x_1 et x_2 sera la somme des réponses y_1 et y_2 pondérées de la même manière. Une des conséquences de la linéarité est la possibilité d'appliquer le **principe de superposition**.

Les trois opérateurs linéaires de base que nous considérons dans l'étude des systèmes linéaires sont :

- proportionnel : $y = a \cdot x$ où a est une constante
- intégration : $y = a \cdot \int f(x) dx$ où a est une constante
- dérivée : $y = a \cdot \frac{df(x)}{dx}$ où a est une constante

On peut aisément vérifier qu'il respecte la condition 2.4.

2.1.2 Invariance temporelle

Il est fréquent qu'un système réagisse de la même manière indépendamment de l'instant où est appliqué le signal d'entrée. Ce qui conduit à la définition suivante :

Definition 2.1.2 Système invariant dans le temps : Un système est dit invariant dans le temps si et seulement si son application associée L vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, L[t \mapsto x(t - t_0)] = L[x](t - t_0) \quad (2.5)$$

En d'autres termes, la réponse du système ne dépend pas de l'origine des temps choisie.

■ **Exemple 2.1** L'effet d'un système sur le signal d'entrée est d'écrit par l'application : $x \mapsto y = 2 \frac{dx}{dt}$. Vérifions d'abord que cet opérateur est linéaire :

Soit $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in L_E^4$ telles que $L[x_1] = y_1$ et de même pour x_2 et y_2 . Vérifions que pour toute entrée $x_3 : t \mapsto x_1(t) + \lambda x_2(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\begin{aligned} L[x_1 + \lambda x_2] &= t \mapsto 2 \frac{d}{dt} (x_1 + \lambda x_2) \\ y_3(t) &= 2 \frac{dx_1}{dt} + 2\lambda \frac{dx_2}{dt} \\ y_3(t) &= 2y_1(t) + 2\lambda y_2(t) \end{aligned}$$

Le système est donc linéaire. Vérifions son invariance temporelle. Décalons l'excitation d'une durée t_0 et regardons l'effet sur la réponse :

$$x(t - t_0) \rightarrow 2 \frac{d}{dt} x(t - t_0) = y(t - t_0)$$

La réponse se trouve décalée de la même durée t_0 que l'excitation. Le système est donc invariant dans le temps. ■

2.1.3 Passivité

Dans ce cours, on considèrera aussi des systèmes passifs, dans le sens où il n'y a pas d'énergie emmagasinée ou fournie par une entrée autre que celle sur laquelle on applique le signal d'entrée étudié.

2.1.4 Causalité

L'étude des systèmes linéaires passent par l'étude et la synthèse de fonctions mathématiques. Tous les systèmes linéaires physiquement réalisables peuvent être décrits par une fonction mathématique linéaire. Par contre, la réciproque n'est pas forcément vraie : un système décrit par une fonction linéaire n'est pas nécessairement physiquement réalisable. Une caractéristique importante qui différencie les systèmes physiquement réalisables de ceux qui ne le sont pas est la notion de causalité. On entend par physiquement réalisable un système pouvant traiter en temps réel les signaux d'entrée. Dans un système causal, l'effet ne peut pas précéder la cause (2.6). Un système sera physiquement réalisable s'il est causal, c'est-à-dire que sa réponse ne dépend que des états présents et passés de l'excitation.

$$\forall t < t_0 : x(t) = 0 \rightarrow \forall t < t_0 : y(t) = 0 \quad (2.6)$$

Les systèmes numériques peuvent être non causaux car ils sont capables de stocker les valeurs du signal d'entrée pour un traitement différé. On peut prendre l'exemple de l'application de floutage d'une image numérique. Celle-ci correspond à une matrice de données, représentant chaque pixel de l'image. Le floutage consiste à appliquer un filtre (par exemple gaussien) qui sera centré sur chaque pixel. Ce filtre effectue une somme pondérée du pixel central mais aussi des pixels voisins, situés avant et après le pixel central. L'effet du floutage d'un pixel dépend donc de pixels situés après dans l'ordre de rangement des pixels.

2.2 Equation générale d'un système linéaire

La réponse d'un système linéaire sera gouvernée par trois types d'effet, liés aux trois opérateurs linéaires précédemment identifiés, pouvant se superposer : proportionnel, différentiateur et intégrateur. Globalement, un système linéaire est gouverné par une équation différentielle ordinaire donnée par 2.7. On l'appelle l'équation générale du système. Pour une excitation $x(t)$ donnée, sa résolution permettra de déterminer la réponse $y(t)$.

$$\sum_{i=0}^M a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^N b_j \times \frac{d^j x}{dt^j} \quad (2.7)$$

2.3 Réponse d'un système

La réponse d'un système correspond au signal (ou aux signaux) de sortie lorsqu'il est excité par un (ou plusieurs) signal d'entrée. En reprenant l'équation générale 2.7, on remarque que l'on peut distinguer :

- la réponse propre ou naturelle d'un système, notée $y_0(t)$, correspondant à la solution de l'équation différentielle pour une excitation nulle.
- la réponse forcée, notée $y_f(t)$ correspondant à la solution de l'équation différentielle pour une excitation particulière $x(t)$.

La réponse d'un système sera la superposition de ces deux réponses.

$$y(t) = y_0(t) + y_f(t) \quad (2.8)$$

Dans la suite du cours, nous ne nous intéresserons qu'à des systèmes causaux, et nous considérerons que les excitations sont nulles pour $t < 0$.

2.4 Réponse naturelle d'un système LTI

Il s'agit de la partie de la réponse qui est indépendante de l'excitation. Elle est donc intrinsèque aux caractéristiques du système. Elle se détermine en résolvant l'équation différentielle 2.7 dans le cas où l'excitation $x(t)$ est nulle.

$$\sum_{i=0}^M a_i \times \frac{d^i y}{dt^i} = 0 \quad (2.9)$$

On pourrait s'interroger sur le sens de cette réponse. Si le système n'avait pas emmagasiné d'énergie au départ, la réponse serait nulle, ce qui ne présente pas d'intérêt pour l'étude des systèmes. La réponse naturelle n'apparaît que si le système a été préalablement excité avant $t = 0$.

Comme l'excitation disparaît pour $t > 0$, la réponse sera forcément transitoire. Seule une fonction présentant la même forme avant/après dérivation plusieurs fois peut être solution de l'équation 2.9. Il n'existe qu'une seule forme de fonction avec une telle propriété : la forme exponentielle complexe donnée par (2.10).

$$y_0(t) = A \cdot \exp(pt) \quad (2.10)$$

avec A et $p \in \mathbb{C}$. La forme générale de la réponse naturelle sera donc donnée par $\sum_{i=0}^M a_i \cdot p^i \cdot \exp(p \cdot t)$. Hormis la solution triviale $y_0(t) = 0$, la solution de cette équation est donnée par 2.11.

$$\sum_{i=0}^M a_i \cdot p^i = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^M (p - p_i) = 0 \quad (2.11)$$

Ce polynôme est appelée l'équation caractéristique du système. En effet, les caractéristiques de la réponse naturelle du système sont liées aux M solutions ou racines p_i de cette équation. La réponse naturelle peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^M A_i \cdot \exp(p_i \cdot t) \quad (2.12)$$

où les termes A_i dépendent des conditions initiales connues en un temps t_0 .

2.4.1 Fréquences naturelles d'un système LTI

Les M racines de l'équation caractéristique du système sont appelées les fréquences naturelles ou fréquences propres du système. Elles sont complexes et de la forme suivante :

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i \quad (2.13)$$

En reprenant 2.12, la réponse naturelle pourra s'exprimer en fonction de ces fréquences naturelles :

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^M A_i \exp(\sigma_i t) \exp(j\omega_i t) \quad (2.14)$$

ω_i caractérise la pulsation de la réponse associée à cette racine, tandis que la partie réelle σ_i indique l'atténuation ou l'amortissement de cette réponse. Leur connaissance est indispensable car ce sont elles qui caractérisent la forme temporelle de la réponse du système. La prédiction de l'évolution temporelle de la réponse du système va passer par l'analyse de ces racines.

2.4.2 Plan p

Puisque les racines de l'équation caractéristique déterminent la réponse naturelle d'un système, il est intéressant d'établir un système de représentation graphique facilitant l'analyse du système. C'est le but de la représentation appelée plan complexe ou plan P, illustré à la figure 2.1. Il s'agit d'un repère cartésien dans lequel les racines sont placées, permettant de visualiser leurs parties réelles et imaginaires. Selon le positionnement des racines dans le plan P, les caractéristiques du système seront différentes, notamment sa stabilité.

Exemple d'équation caractéristique :

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = 0$$

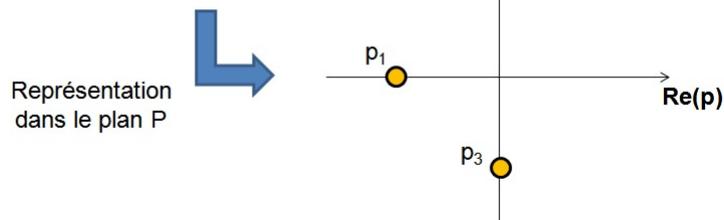


FIGURE 2.1 – Placement des racines de l'équation caractéristique dans le plan P

2.4.3 Analyse du plan p - Stabilité du système

La stabilité d'un système est une notion qui sera abordée plus en détail dans les cours d'automatique. Dans ce cours, nous utiliserons une définition au sens large : on entend par stabilité le fait que la réponse d'un système converge vers une valeur finie quelle que soit l'excitation appliquée (à condition que cette excitation converge). Dès que l'on conçoit un système, c'est une propriété indispensable qui doit être vérifiée. Un système est stable si et seulement si à toute entrée bornée, il fait correspondre une sortie bornée :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) (|x(t)| \leq A), \text{ avec } A \in \mathbb{R} \Rightarrow (|y(t)| \leq B), \text{ avec } B \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

La position des racines de l'équation caractéristique détermine à la fois la stabilité du système linéaire, mais aussi la forme temporelle de réponse. Pour l'admettre, considérons les cinq cas suivants, correspondant à cinq positions différentes d'une racine p_i dans le plan P, et déterminons le type de réponse temporelle. On considère $t > 0$:

1. p_i est purement complexe ($\sigma_i = 0$) : elle est située sur l'axe des ordonnées du plan P. La réponse naturelle sera donc un signal purement (co)sinusoïdale, dont l'oscillation aura une fréquence ou une pulsation déterminée par ω_i . Le système est en limite de stabilité car sa réponse oscille en permanence autour d'une valeur.

2. p_i est purement réel et négatif ($\sigma_i < 0$ et $\omega_i = 0$) : la racine est située sur l'axe des abscisses à gauche de l'origine. La réponse est une fonction exponentielle décroissante, sans la moindre oscillation, indiquant un comportement amorti. La réponse naturelle indique un système parfaitement stable.
3. p_i est purement réel et positif ($\sigma_i > 0$ et $\omega_i = 0$) : la racine est située sur l'axe des abscisses à droite de l'origine. La réponse est une fonction exponentielle croissante, sans la moindre oscillation, indiquant un comportement divergeant. La réponse naturelle indique un système instable.
4. p_i est une valeur complexe quelconque dont la partie réelle est négative ($\sigma_i < 0$ et $\omega_i \neq 0$) : la racine est située dans le demi plan à gauche de l'axe des ordonnées. La réponse va présenter une oscillation dont la fréquence est déterminée par ω_i , mais dans l'amplitude s'atténue plus ou moins rapidement au cours du temps selon la valeur σ_i . Cette réponse indique un système stable.
5. p_i est une valeur complexe quelconque dont la partie réelle est positive ($\sigma_i > 0$ et $\omega_i \neq 0$) : la racine est située dans le demi plan à droite de l'axe des ordonnées. La réponse va présenter une oscillation dont la fréquence est déterminée par ω_i , mais dans l'amplitude s'accroît plus ou moins rapidement au cours du temps selon la valeur σ_i . Cette réponse indique un système instable.

La figure ci-dessous illustre les types de réponse naturelle associées à une fréquence naturelle, selon sa position dans le plan P.

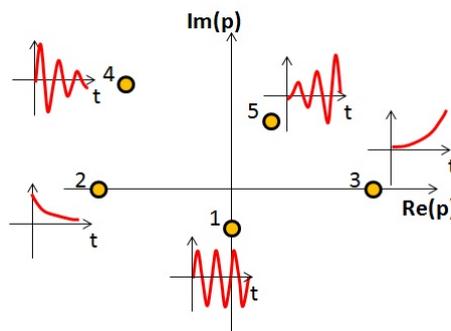


FIGURE 2.2 – Types de réponse naturelle en fonction de la position d'une racine dans le plan P.

Domaine fréquentiel

On remarque que l'on est capable de représenter avec un point dans le plan p une fonction temporelle de type exponentielle complexe. Il s'agit de la même fonction, mais vue dans un autre domaine, que l'on appelle **domaine fréquentiel**. Dans ce domaine, la fonction n'est plus caractérisée par le temps, mais par sa fréquence. Ce domaine, dit dual du domaine temporel, présente un intérêt majeur dans l'analyse et le traitement du signal. De manière générale, les fréquences sont des grandeurs complexes. Néanmoins, dans le cas de l'analyse des signaux, on ne considère que des fréquences réelles. Nous reviendrons sur cette notion dans les chapitres suivants.

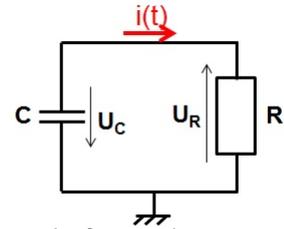
2.4.4 Ordre d'un système linéaire

Plus l'équation caractéristique présente de racines, plus sa réponse devient complexe, puisqu'elle résulte de la superposition de plusieurs fréquences comme le montre l'équation 2.14. On appelle l'ordre d'un système le nombre de racines que présente son équation caractéristique. Il s'agit aussi de l'ordre ou du degré de l'équation différentielle caractérisant le système. Pour illustrer la notion d'ordre, nous allons analyser la réponse naturelle de deux circuits électriques passifs, caractérisés par des équations caractéristiques d'ordre 1 et 2. Vous retrouverez une analyse plus détaillée dans

le cours d'électronique.

Exemple 1 : circuit RC

On considère le circuit ci-contre, formé par une résistance R et un condensateur C. En $t = 0$, le condensateur est chargé, de sorte que la tension à ses bornes soit égale à U_{C0} . On note U_C et U_R les tensions aux bornes du condensateur et de la résistance.



On souhaite déterminer la réponse naturelle de ce circuit pour $t > 0$, sous la forme du courant électrique $i(t)$ circulant au travers du circuit. On souhaite aussi déterminer la fréquence naturelle de ce circuit, caractérisant sa réponse transitoire.

Commençons par appliquer la loi des mailles à ce circuit, qui permet d'écrire : $U_R(t) + U_C(t) = 0$. En prenant en compte les relations tension-courant pour la résistance et le condensateur, cette relation peut être mise sous la forme ci-dessous ne faisant apparaître que le courant. Après différenciation de l'équation, on fait apparaître une équation différentielle du premier ordre. On constate que le terme RC est homogène à un temps. On l'appelle la constante de temps du circuit RC, généralement notée τ .

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

On retrouve une équation du même type que 2.9. La solution de cette équation peut donc s'écrire : $i(t) = Ae^{pt}$, où A est lié aux conditions initiales et p est l'unique fréquence naturelle du système. En intégrant cette solution dans l'équation différentielle, on en déduit l'équation caractéristique de ce circuit (2.16).

$$Ap \cdot e^{pt} + \frac{A}{RC} e^{pt} = 0$$

$$p + \frac{1}{RC} = p - p_0 = 0 \tag{2.16}$$

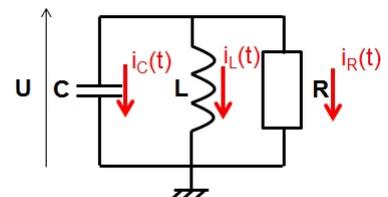
Cette équation présente une seule racine $p_0 = -\frac{1}{RC}$. Ce circuit électrique est donc un système d'ordre 1. La racine est purement réelle et négative. Elle se situe donc à gauche de l'axe des imaginaires dans le plan P, traduisant le comportement stable et non oscillant du système (équivalent au point 2 de la figure 2.2). La fréquence naturelle indique donc une réponse naturelle du type exponentielle décroissante. Cela est confirmé par l'expression de la réponse naturelle du circuit, qui s'écrit :

$$i(t) = A \exp(p_0 t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad t > 0 \tag{2.17}$$

La valeur de A peut être déterminée à partir des conditions initiales en $t = 0^+$. Le courant dans le circuit est alors donné par : $i(0) = \frac{U_R(0)}{R} = \frac{U_{C0}}{R}$. A partir de 2.17, on en déduit $A = \frac{U_{C0}}{R}$.

Exemple 2 : circuit RLC

On considère le circuit ci-contre, formée par une résistance R, un condensateur C et une bobine L montées en parallèle (R, L et $C \geq 0$). En $t = 0$, le condensateur est chargé, de sorte que la tension à ses bornes soit égale à U_{C0} . On note i_C , i_R et i_L les courants traversant ces trois composants.



On souhaite déterminer la réponse naturelle de ce circuit pour $t > 0$, sous la forme de la tension $u(t)$

mesurée aux bornes du circuit. On souhaite aussi déterminer la fréquence naturelle de ce circuit, caractérisant sa réponse transitoire.

Commençons par appliquer la loi des nœuds à ce circuit, qui permet d'écrire : $i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0$. En prenant en compte les relations tension-courant pour la résistance et le condensateur, cette relation peut être mise sous la forme ci-dessous ne faisant apparaître que le courant. Après différenciation de l'équation, on fait apparaître une équation différentielle du second ordre. Pour simplifier les notations, on pose : $\alpha = \frac{1}{2RC}$ et $\omega^2 = \frac{1}{LC}$.

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt = 0 \rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega^2 u(t) = 0$$

On retrouve une équation du même type que 2.9. La solution de cette équation peut donc s'écrire : $u(t) = Ae^{pt}$. En intégrant cette solution dans l'équation différentielle, on en déduit l'équation caractéristique de ce circuit (2.18).

$$(p^2 + 2\alpha p + \omega^2)Ae^{pt} = 0$$

$$p^2 + 2\alpha p + \omega^2 = (p + p_1)(p + p_2) = 0 \quad (2.18)$$

Cette équation présente deux racines p_1 et p_2 . Ce circuit électrique est donc un système d'ordre 2, dont la réponse naturelle va s'écrire :

$$u(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (2.19)$$

où A_1 et A_2 dépendent des conditions initiales. Selon la valeur de R , L et C , la nature et la position de ces racines dans le plan P va changer, modifiant le comportement transitoire du circuit. Pour déterminer ces racines, il suffit de résoudre une équation d'ordre 2, dont le déterminant est donné par : $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega^2)$. La nature des racines varie selon le signe du déterminant :

$$\text{si } \alpha \geq \omega : \begin{cases} p_1 = \frac{-2\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \\ p_2 = \frac{-2\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\text{si } \alpha < \omega : \begin{cases} p_1 = \frac{-2\alpha + j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha + j\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \\ p_2 = \frac{-2\alpha - j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha - j\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

On peut distinguer plusieurs types de comportement transitoire distincts selon les valeurs de α et ω :

- si $\alpha \neq 0$, alors les deux racines présentent une partie réelle négative. Le système présente donc un caractère stable.
- si $\alpha \geq \omega$, les deux racines sont purement réelles et négatives. Dans le plan P , elles sont situées sur l'axe des réels à gauche de l'axe des imaginaires. La réponse du circuit sera du type exponentiel décroissant sans oscillation (équivalent au point 2 de la figure 2.2).
- si $\alpha < \omega$ et $\alpha \neq 0$, les deux racines sont conjuguées. Elles sont situées à gauche de l'axe des imaginaires dans le plan P . La réponse du circuit sera du type oscillation amortie de pulsation $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ (équivalent au point 4 de la figure 2.2).
- si $\alpha = 0$, les deux racines sont purement imaginaires et conjuguées. Elles sont placées sur l'axe imaginaire du plan P , symétriquement à l'axe de réels. La réponse du circuit sera une oscillation non amortie de pulsation ω (équivalent au point 1 de la figure 2.2).

2.5 Réponse forcée

La réponse forcée est la solution de l'équation générale du système pour une excitation non nulle. La réponse va dépendre de la forme de l'excitation, mais aussi des propriétés du système. Puisque la réponse dépend de l'excitation, il est préférable de déterminer des excitations dont les propriétés faciliteront l'analyse de la réponse forcée d'un système. Pour cela, il faut chercher des familles d'excitation dont la forme n'est pas modifiée par l'effet du système LTI. Ainsi, en connaissant la forme de l'excitation, on déduira immédiatement la forme de la réponse. Seuls quelques coefficients que nous préciserons seront à calculer.

Nous allons nous intéresser à deux familles d'excitations répondant à ce critère : l'excitation exponentielle complexe (que nous avons rencontré précédemment) et la famille d'excitation impulsionnelle.

2.5.1 Excitation exponentielle complexe

L'excitation exponentielle complexe présente la forme suivante :

$$x = \begin{cases} \hat{X} \cdot \exp(p_x t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

où $\hat{X} = |X| \cdot \exp(j\theta)$ est l'amplitude complexe ou vecteur de Fresnel le phaseur du signal et $p_x = \alpha + j\omega$ sa fréquence complexe. Dans le cas où l'on s'intéresse à des signaux réels (cas rencontré en pratique), cette forme reste valable à condition de ne conserver que la partie réelle. Elle s'écrit alors :

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{Re}[\hat{X} \cdot e^{p_x t}] = |X| \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \theta) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

Comme dans le cas de la fréquence naturelle, la fréquence complexe peut être représentée dans le plan P. Sa position indique qualitativement la forme temporelle de l'excitation. Si p_x est purement réelle, l'excitation est une fonction exponentielle pure. Si p_x est purement imaginaire, l'excitation est une fonction cosinusoidale pure. L'excitation est dite monochromatique. $|X|$ représente son amplitude et θ sa phase.

Exemple : Récrivez les expressions des fonctions ci-dessous sous la forme de fonctions réelles : $y(t) = \operatorname{Re}[(1 + j)e^{(-2+j)t}]$ et $z(t) = \operatorname{Re}[2e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j10t}]$.

Les deux fonctions sont des exponentielles complexes. Elles représentent des signaux temporels réels puisqu'on ne conserve que la partie réelle. Le phaseur de la fonction $y(t)$ peut s'écrire $\hat{Y} = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$. La fréquence complexe est égale à $(-2+j)$. Elle contient une partie réelle négative donnant un comportement d'exponentielle décroissante à l'amplitude, et une partie imaginaire donnant un comportement oscillant de pulsation égale à 1. La fonction $y(t)$ peut donc s'écrire : $y(t) = \sqrt{2}e^{-2t} \cos(t + \frac{\pi}{4})$. En procédant de même pour la fonction $z(t)$, on remarque que sa fréquence est purement complexe. Il s'agit d'une fonction cosinusoidale s'écrivant : $z(t) = 2\cos(10t + \frac{\pi}{2})$.

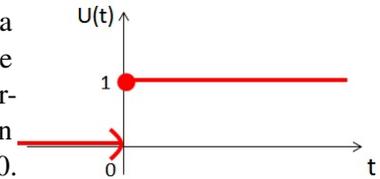
L'excitation exponentielle complexe a une propriété remarquable : l'action d'un opérateur linéaire (proportionnel, intégrateur ou différentiel) laisse sa forme inchangée. Seule son amplitude et sa localisation temporelle sont modifiées. On peut donc en déduire une propriété des systèmes LTI : lorsqu'un système linéaire est excité par un signal exponentiel complexe (en pratique, un signal sinusoidal), la réponse sera aussi une fonction du même type et de même fréquence complexe. Seule l'amplitude et la phase changeront.

2.5.2 Famille d'excitations impulsionnelles

Nous parlons ici de familles car nous allons parler de plusieurs fonctions, reliées entre elles et associées à une excitation très importante dans l'analyse des systèmes et des signaux : l'impulsion de Dirac.

Echelon unitaire ou fonction de Heaviside

L'échelon unitaire ou fonction de Heaviside (représentée à l'aide la lettre u dans ce cours) est décrite sur la figure ci-contre et est décrite par l'équation 2.24. Elle représente le signal que l'on obtiendrait derrière un interrupteur idéal que l'on fermerait à $t = t_0$. Son expression est donnée par 2.24. Dans la suite, on utilisera principalement $t_0 = 0$.



$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.24)$$

Cette fonction peut être utilisée pour représenter n'importe quelle autre fonction avec une allure en marches d'escalier, comme l'illustre l'exemple présenté sur la figure 2.3. A partir de trois fonctions de Heaviside dont les instants d'apparition de l'échelon sont décalés, il est possible de générer une forme d'onde plus complexe.

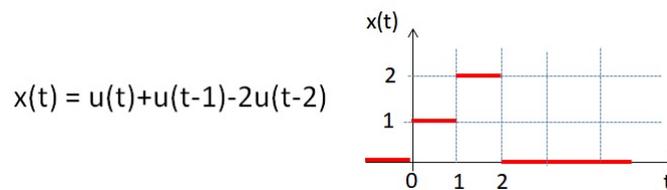


FIGURE 2.3 – Exemple d'utilisation de la fonction de Heaviside pour bâtir une fonction plus complexe

Une fonction courante dans l'étude des signaux (que nous retrouverons dans le chapitre consacré à la transformée de Fourier) est la fonction porte, notée $\Pi_\tau(t)$ et représentée à la figure 2.4. Elle représente un signal borné temporellement, d'amplitude constante (normalisée à 1) et centré par défaut autour de $t = 0$.

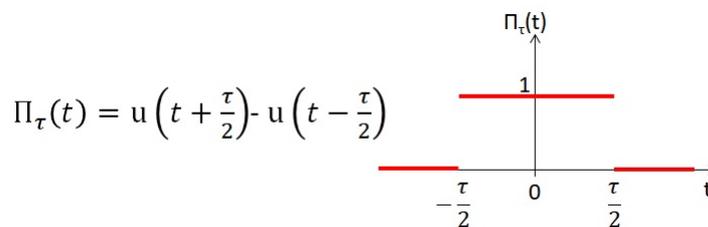


FIGURE 2.4 – Fonction porte

La fonction de Heaviside peut servir de base pour générer d'autres fonctions, par intégration ou différenciation. Par exemple, en l'intégrant une fois, on obtient la fonction rampe, représentée à la figure 2.5. Si on l'intègre n fois, on peut obtenir des fonctions présentant une croissance polynomiale en fonction du temps (2.25).

$$u^{(-n)}(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot u(t) \quad (2.25)$$

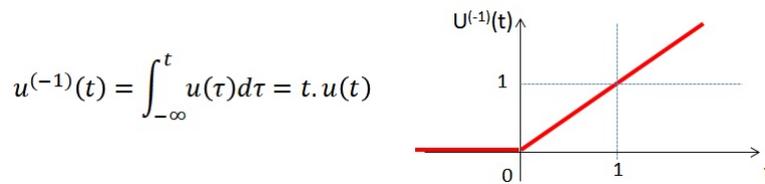


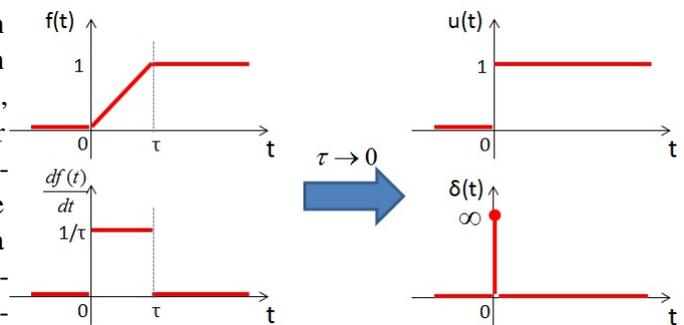
FIGURE 2.5 – Fonction porte

Le cas de la dérivation est plus complexe car elle entraîne l'apparition d'une discontinuité. En effet, la dérivée de la fonction de Heaviside devient infinie en t_0 . Cet écueil ne peut se traiter qu'en utilisant la théorie des distributions, qui va permettre de définir l'impulsion de Dirac.

Impulsion ou distribution de Dirac

L'impulsion de Dirac se trouve en différenciant l'échelon unitaire (2.28). On voit immédiatement apparaître un problème : la dérivée est nulle partout, sauf là où l'échelon présente une discontinuité. Sa dérivée devient infinie. L'impulsion de Dirac n'est pas une fonction au sens classique, mais une distribution. Le but de cette partie n'est pas de faire une présentation exhaustive de la théorie des distributions, mais de donner du sens à cette impulsion de Dirac, de décrire comment l'utiliser convenablement et de montrer son intérêt pour l'étude des systèmes et des signaux.

Il est possible de donner une justification physique à l'impulsion de Dirac, comme illustrée sur la figure ci-contre. On considère une fonction échelon avec un temps de transition finie τ . En dérivant cette fonction, on obtient une fonction décrivant une impulsion brève de durée τ . L'aire de cette fonction, associée à son énergie, est égale à 1. Au fur et à mesure que la durée τ décroît, l'amplitude de cette impulsion croît, mais son aire reste unitaire (équation 2.26). Le passage à la limite montre que l'impulsion tend à devenir nulle partout, sauf à l'origine où l'amplitude deviendrait infinie. L'impulsion de Dirac est donc une abstraction mathématique permettant de définir une impulsion infiniment courte.



Une des principales propriétés de l'impulsion de Dirac est son intégrale unitaire (2.26).

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1 \quad (2.26)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (2.27)$$

L'impulsion de Dirac pourrait donc être interprétée comme la dérivée de la fonction échelon unitaire (équation 2.27), même s'il s'agit d'un abus de notation puisque, contrairement à la fonction échelon, l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction. La théorie des distributions permet de faire apparaître la dérivée, au sens des distributions, mais cela sort du cadre de ce cours.

La position de cette impulsion n'est pas forcément centrée en 0. Elle peut être centrée n'importe où. De manière générale, on peut écrire que la distribution ou impulsion de Dirac est définie par l'équation 2.28.

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.28)$$

Quel peut être l'intérêt d'un tel objet mathématique, nul partout sauf en un point où il devient infini ? Il est certain qu'il ne peut être utilisé comme une fonction, puisqu'il ne s'agit pas d'une fonction. Par contre, il peut servir à calculer une fonction indicatrice $I_f(\Delta)$ pour mesurer une caractéristique d'une fonction f , définie en \mathbb{R} , comme le montre l'équation 2.29. La fonction f est localement intégrable et $\delta(t)$ sert de fonction test.

$$I_f(\delta) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0) f(t) dt \quad (2.29)$$

A l'intérieur de l'intégrale, la distribution de Dirac prend tout son sens. Elle va permettre de mesurer la fonction f au point $t = t_0$. En effet, à l'intérieur de l'intégrale, en multipliant l'impulsion avec la fonction f et en l'intégrant sur un intervalle dt infiniment court, on prélève la valeur de la fonction f au point $t = t_0$. On appelle cette propriété la propriété d'échantillonnage, donnée par 2.30. Celle-ci présente un très grand intérêt dans l'étude des signaux.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0) \quad (2.30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) dt = f(t_0) \quad (2.31)$$

Précisons-le à nouveau : **l'utilisation de l'impulsion de Dirac n'a de sens qu'à l'intérieur d'une intégrale.** Ce n'est pas une fonction classique au sens du terme mais une distribution, qui n'a pour but que de modéliser la mesure ou l'échantillonnage d'une fonction en un point. L'usage pratique montre qu'on trouve souvent l'impulsion de Dirac utilisée à l'extérieur de toute intégrale, comme une fonction mathématique classique. C'est bien entendu une écriture abusive et potentiellement source d'erreur. Cependant, ce type d'écriture permet parfois une simplification de l'écriture des calculs, qui est toléré si l'impulsion de Dirac est correctement employée dans une intégrale. Il est courant de représenter sur un graphique l'impulsion de Dirac, au même titre qu'une fonction. Techniquement, c'est impossible car l'amplitude de l'impulsion de Dirac devient infinie. Par convention, on la représente sous la forme d'un trait, terminé par une flèche, avec à proximité une valeur placée entre parenthèse indiquant l'aire du Dirac. La figure 2.6 illustre cette représentation, avec l'affichage de l'impulsion $2\delta(t-1)$. L'impulsion est centrée en $t = 1$ et son aire est égale à 2. Sur ce graphe, on a superposé l'impulsion de Dirac avec le tracé d'une fonction f quelconque. L'utilisation de l'impulsion à l'intérieur de l'intégrale 2.31 permet d'extraire la valeur de f au point $t = 1$.

Revenons au problème initial de sélection de familles d'excitation inchangées par l'effet d'un système LTI. On peut remarquer que cette propriété est aussi vérifiée avec la famille d'excitation impulsionnelle. L'action d'un opérateur proportionnel, intégrateur ou dérivée appliquée à une fonction de cette famille donnera une nouvelle fonction appartenant aussi à cette famille. De plus, on comprend intuitivement l'intérêt de l'impulsion de Dirac pour déterminer la réponse temporelle d'un système à n'importe quelle excitation. De par sa propriété d'échantillonnage, chaque point

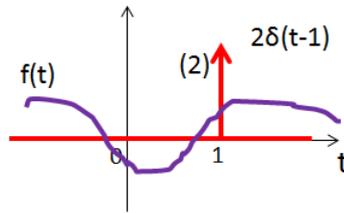


FIGURE 2.6 – Représentation graphique conventionnelle d'une impulsion de Dirac

d'une excitation peut être modélisée, à la limite, par une impulsion de Dirac. L'excitation complète peut donc être modélisée comme la superposition d'un nombre infini d'impulsions de Dirac. Si on sait comment le système réagit à une impulsion de Dirac, la réponse à l'excitation sera la superposition des réponses à toutes les impulsions de Dirac, puisque le système est linéaire.

2.6 Les différents types de réponse caractérisant les systèmes LTI

Maintenant que nous avons défini deux familles d'excitation adaptées à l'étude des systèmes LTI, nous pouvons définir plusieurs types de réponse qui nous aideront à analyser les propriétés de ces systèmes.

2.6.1 Réponse impulsionnelle

Elle correspond à la réponse d'un système excité par une impulsion de Dirac, que l'on note $h(t)$. Même si l'amplitude de cette impulsion est infinie, son énergie vaut 1. Au lieu de représenter cette valeur infinie, nous utiliserons la valeur de 1. N'oublions pas qu'il ne s'agit pas d'une fonction mais d'une distribution, qui n'a du sens qu'à l'intérieur d'une intégrale.

$$\text{si } x(t) = \delta(t) \rightarrow y_f(t) = h(t) \quad (2.32)$$

Quel que soit le système LTI considéré, puisque l'excitation devient nulle pour $t > 0$, on retrouve le calcul de la réponse naturelle. L'application de l'impulsion en $t=0$ ne fait que changer les conditions initiales.

$$\text{si } x(t) = \delta(t) \rightarrow y_f(t) = y_0(t) \quad (2.33)$$

La réponse impulsionnelle va nous fournir un moyen de calculer la réponse d'un système LTI à n'importe quelle excitation, en effectuant les calculs uniquement dans le domaine temporel. C'est ce que nous allons démontrer. Tout signal peut être vu comme la superposition d'un nombre infini de points, pouvant être modélisés par des impulsions de Dirac, pondérées et décalées dans le temps. Comme le montre la figure 2.7, une excitation quelconque $x(t)$ peut être approximée par une suite de rectangles adjacents, de largeur $\Delta\tau$, que l'on peut remplacer par des impulsions de Dirac équivalentes de même surface. Ainsi, elles transportent la même énergie. Si la largeur $\Delta\tau$ tend vers zéro, cette approximation devient de plus en plus juste. Dans l'exemple considéré, on suppose que $x(t) = 0$ pour $t < 0$ par souci de lisibilité. Le même raisonnement resterait juste avec $x(t)$ non nul pour $t < 0$. L'excitation peut alors s'approximer par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot \delta(t - n\Delta\tau)$$

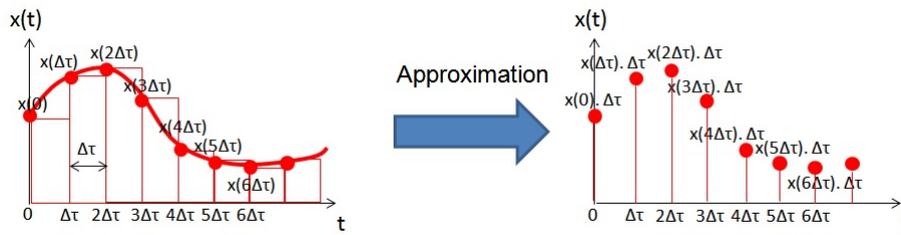


FIGURE 2.7 – Excitation quelconque $x(t)$ approximée par une suite d’impulsion de Dirac

Supposons que cette excitation attaque l’entrée d’un système LTI dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est connue (Fig. 2.8). Par souci de lisibilité, on suppose aussi que $h(t) = 0$ pour $t < 0$.

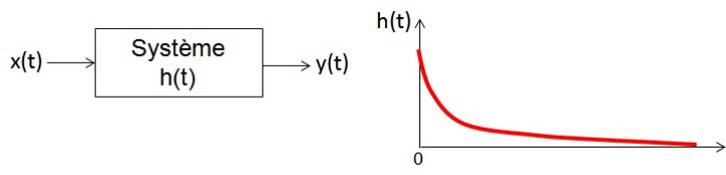
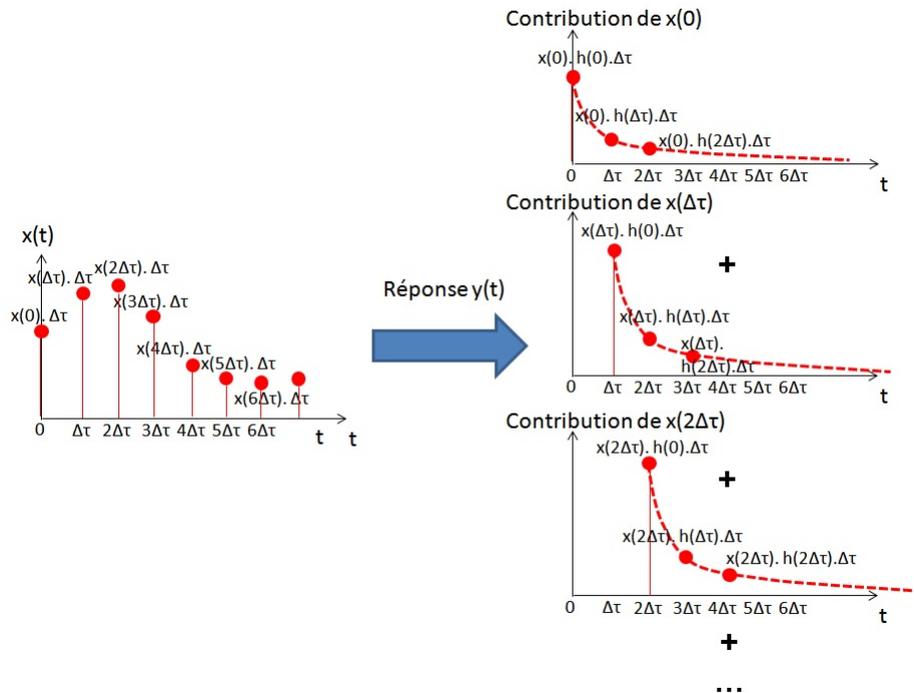


FIGURE 2.8 – Réponse impulsionnelle d’un système

Chaque impulsion élémentaire composant $x(t)$ et apparaissant à l’instant $k \times \Delta\tau$ contribue à la réponse en sortie, comme l’illustre la figure 2.9. Chacune d’entre elles produit une réponse égale à la réponse impulsionnelle du système, mais :

- pondérée par l’amplitude de l’excitation d’entrée à l’instant $k \times \Delta\tau$
- décalée dans le temps de $k \times \Delta\tau$



La réponse globale du système est obtenue en sommant l’ensemble des contributions de chaque

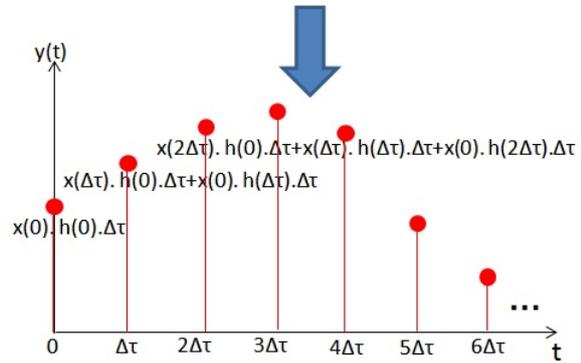


FIGURE 2.9 – Construction de la réponse impulsionnelle

impulsion élémentaire formant l'excitation. Elle peut alors s'approximer par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot h(t - n\Delta\tau)$$

En faisant tendre $\Delta\tau$ vers zéro, cette somme converge vers une intégrale donnée par la relation ci-dessous. Ce calcul intégral particulier, faisant intervenir le produit de deux fonctions dont les indices τ et $t-\tau$ sont balayés dans des directions opposées, porte un nom : le produit de convolution. Cette opération est symbolisée par le signe $*$.

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \cdot h(t - n\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x * h(t) \quad (2.34)$$

Cette relation basée sur le produit de convolution fournit donc un outil de calcul de la réponse du système directement dans le domaine temporel. Cependant, c'est un calcul complexe, passant par une opération longue et fastidieuse si elle est effectuée à la main. Nous y reviendrons au chapitre 7, qui sera consacré au calcul des réponses des systèmes LTI directement dans le domaine temporel. Cependant, avant d'aborder ce point, nous allons d'abord considérer le cas d'une excitation exponentielle complexe pour dériver le concept de fonction de transfert défini dans le domaine fréquentiel. Nous verrons que dans ce domaine, le calcul de la réponse du système est beaucoup plus aisée !

Condition pour garantir la causalité

Un système est causal si sa réponse ne dépend que des états passés et présents. A partir de la réponse impulsionnelle, on peut en déduire une condition : il faut que $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Les systèmes causaux sont les seuls à être physiquement réalisables. Le calcul de la réponse d'un système causal à partir de sa réponse impulsionnelle peut s'écrire :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x * h(t) \quad (2.35)$$

2.6.2 Réponse indicielle

Elle correspond à la réponse d'un système excité par une fonction de Heaviside. On la note $a(t)$.

$$\text{si } x(t) = u(t) \rightarrow y_f(t) = a(t) \quad (2.36)$$

Autre manière de déterminer la réponse impulsionnelle

Sans démonstration, on peut affirmer que si on différencie l'excitation, on peut déterminer la nouvelle réponse en différenciant la réponse à l'excitation initiale : si $y(t) = L[x(t)]$ alors $\frac{dy}{dt} = L[\frac{dx}{dt}]$. Ainsi, puisque l'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon unitaire, si on connaît la réponse indicielle, on peut retrouver la réponse impulsionnelle en dérivant la réponse indicielle.

$$\delta(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad (2.37)$$

2.6.3 Réponse à une exponentielle complexe - Fonction de transfert

On considère une excitation exponentielle complexe. La réponse forcée a donc la même forme que l'excitation, et présente la même fréquence complexe. La seule inconnue est le phaseur \hat{Y} de la réponse. Soit l'excitation $x(t) = \text{Re}[\hat{X} \cdot e^{pt}]$ et la réponse $y_f(t) = \text{Re}[\hat{Y} \cdot e^{pt}]$ pour $t > 0$. Si on reprend l'équation différentielle ordinaire générale d'un système LTI donnée par 2.7, on peut écrire la relation suivante.

$$\begin{aligned} \sum a_i \cdot \text{Re}[p^i \cdot \hat{Y} \cdot \exp(pt)] &= \sum b_i \cdot \text{Re}[p^j \cdot \hat{X} \cdot \exp(pt)] \\ \sum a_i \cdot \text{Re}[p^i \cdot \hat{Y}] &= \sum b_i \cdot \text{Re}[p^j \cdot \hat{X}] \\ \hat{Y} \cdot \sum a_i \cdot \text{Re}[p^i] &= \hat{X} \cdot \sum b_i \cdot \text{Re}[p^j] \end{aligned}$$

On peut donc facilement déterminer le phaseur \hat{Y} associée à la réponse, c'est-à-dire le module et le déphasage de la réponse. On peut alors caractériser l'effet du système à une excitation exponentielle complexe quelconque sous une forme appelée fonction de transfert, définie comme le rapport entre les phaseurs de réponse et d'excitation, et défini pour toutes les fréquences complexes.

$$H(p) = \frac{Y}{X}(p) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}}(p) = \frac{\sum a_i \cdot \text{Re}[p^i]}{\sum b_i \cdot \text{Re}[p^j]} = G \frac{\prod_{i=1}^M (p - p_i)}{\prod_{j=1}^N (p - p_j)} \quad (2.38)$$

De manière générale, l'équation 2.38 peut s'écrire comme une fraction rationnelle entre deux polynômes, où G est un terme constant. Les N racines du dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert et les M racines du numérateur sont appelées les zéros de la fonction de transfert. Comme leur nom l'indique, ils annulent la fonction de transfert lorsque la fréquence $p = p_j$. Les pôles sont les mêmes que ceux identifiés dans la réponse naturelle ! Ils ont un rôle prépondérant sur la stabilité du système et la nature de la réponse. Les outils permettant d'étudier l'influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système sortent du cadre de ce cours et seront abordés dans les cours d'automatique.

Avec une excitation exponentielle complexe, l'action du système LTI peut donc se résumer à la multiplication de l'excitation par la fonction de transfert. On peut souligner la facilité de la méthode. Une fois la fonction de transfert connue à une fréquence complexe donnée, la réponse forcée à une exponentielle complexe de même fréquence est trouvée en multipliant le phaseur d'entrée par la fonction de transfert (2.39).

$$\hat{Y}(p) = H(p) \cdot \hat{X}(p) = |H(p)| |X(p)| e^{j(\arg(H(p)) + \arg(\hat{X}(p)))} \quad (2.39)$$

Réponse en régime permanent :

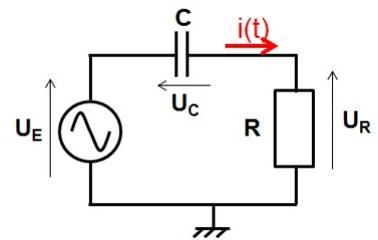
Dans le cas général, l'excitation est complexe. Le cas particulier où $\sigma = 0$ correspond au cas d'une excitation dite monochromatique ou harmonique. On parlera alors de réponse en fréquence. Il correspond aussi au cas du régime permanent avec $\sigma < 0$, c'est-à-dire que t devient suffisamment grand pour que l'influence du terme $e^{\sigma t}$ devienne négligeable. La réponse du système se trouve facilement en remplaçant la fréquence complexe p par $j\omega$. En considérant une excitation cosinusoidale d'amplitude égale à X et de phase Φ_x , la réponse du système est donnée par la relation suivante.

$$y(t) = \text{Re} [|H(\omega)|X \cdot e^{j(\omega t + \arg(H(p)) + \Phi_x)}] = |H(\omega)|X \cdot \cos(\omega t + \arg(H(p)) + \Phi_x) \quad (2.40)$$

La réponse est une grandeur complexe. Le module de la réponse en fréquence est le gain en amplitude de la fonction de transfert du système ou du filtre. Le déphasage du signal en sortie du filtre par rapport au signal d'entrée est l'argument de la fonction de transfert. Le module et la phase sont des fonctions de la pulsation ω .

Exemple

On reprend l'exemple du circuit RC abordé dans la partie IV.4. On considère toujours que le condensateur est chargé initialement en $t = 0$, avec une tension à ses bornes notée U_{C0} . Le circuit est excité par un signal délivrant une excitation exponentielle complexe $U_E(t) = X e^{pt}$ avec $t > 0$ et X l'amplitude complexe. La réponse du circuit correspond à la tension mesurée aux bornes de la résistance R ou tension de sortie. Déterminez la fonction de transfert de ce circuit. Indiquez quels sont les pôles et les zéros. Quelle est la réponse à un signal cosinusoidal, d'amplitude unitaire et de phase nulle ?



La réponse du circuit U_R est la superposition de la réponse naturelle U_{R0} et de la réponse forcée U_{Rf} . La réponse naturelle est liée à la présence d'une condition initiale : ici, le stockage d'une charge dans le condensateur à $t=0$. Sans charge initialement stockée, la réponse naturelle aurait été nulle. Nous avons établi la réponse naturelle de ce circuit en terme de courant. Nous pouvons aisément l'adapter pour la donner en terme de tension de sortie.

$$U_{R0}(t) = R i_0(t) = U_{C0} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad t > 0$$

La réponse forcée est provoquée par l'excitation du circuit en $t > 0$, indépendamment de la présence d'une condition initiale. Commençons par établir une équation différentielle reliant la tension de sortie U_{Rf} et l'excitation $U_E(t)$. On utilise la loi des mailles. Après une dérivation, on obtient l'équation 2.41.

$$U_E(t) = U_C(t) + U_R(t) \Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + U_R(t) \Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{RC} \int U_R(t) dt + U_R(t)$$

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt} \quad (2.41)$$

L'excitation étant de type exponentielle complexe et le circuit linéaire, la réponse est aussi de type exponentielle complexe. Elle s'écrit : $U_{Rf}(t) = Y e^{pt}$. Replaçons les termes U_E et U_R par leurs expressions respectives dans 2.41 et exprimons le rapport entre ces deux grandeurs pour obtenir la fonction de transfert $H(p)$ de ce circuit (équation 2.42).

$$p X e^{pt} = \frac{1}{RC} Y e^{pt} + p Y e^{pt} \Rightarrow p U_E(t) = \frac{1}{RC} U_{Rf}(t) + p U_{Rf}(t)$$

$$H(p) = \frac{U_{Rf}}{U_E}(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{p}{p + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (2.42)$$

La fonction de transfert du système présente un zéro nul et un seul pôle p_0 , qui est exactement le même que celui identifié dans l'analyse de la réponse naturelle. Ce n'est pas une surprise car les pôles agissent sur la stabilité, qui est une caractéristique intrinsèque du système indépendante de l'excitation. Le pôle étant purement réel et négatif, on peut conclure que le système sera stable.

Calculons maintenant la réponse forcée à un signal cosinusoidal, en utilisant 2.40. Le système n'agit que sur l'amplitude et la phase de l'excitation. Il est donc intéressant d'exprimer la fonction de transfert sous la forme de son module et son déphasage. En considérant $p = j\omega$, celles-ci sont :

$$|H(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(\omega)) = \frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow U_{Rf}(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(\omega)))$$

La réponse étant la superposition des réponses naturelles et forcées, celle-ci s'écrit :

$$\Rightarrow U_R(t) = U_{Rf}(t) + U_{R0}(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(\omega))) + U_{C0} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

2.6.4 Calcul de la réponse d'un système dans le domaine temporel ou fréquentiel ?

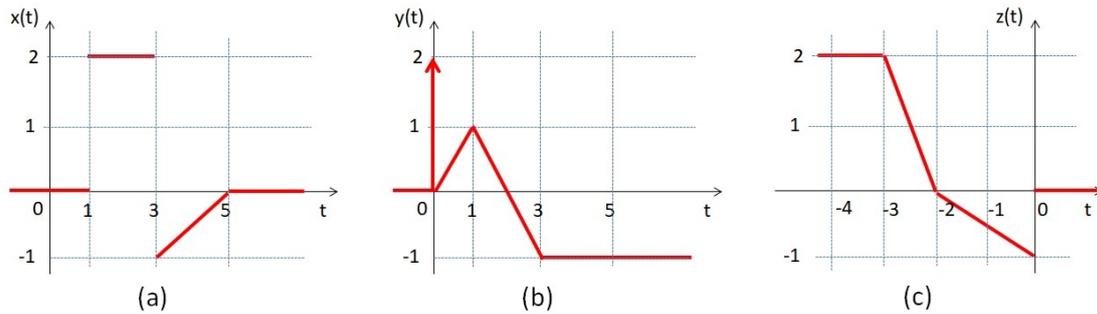
Nous venons de décrire deux manières de calculer l'effet d'un système LTI, selon que l'on considère une excitation impulsionnelle ou exponentielle complexe. Dans le premier cas, la réponse est déterminée directement dans le domaine temporel à l'aide de l'équation 2.34 et de la réponse impulsionnelle, à l'aide d'un produit de convolution. Dans le second cas, la réponse est déterminée dans le domaine fréquentiel à l'aide de l'équation 2.40 et de la fonction de transfert. Bien qu'il semble plus naturel de faire le calcul de la réponse directement dans le domaine temporel, nous avons montré que le calcul dans le domaine fréquentiel était beaucoup plus évident. Il se résume à une simple multiplication de l'excitation par la fonction de transfert. Cependant, comme il s'agit du même système, il y a nécessairement un lien entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert. C'est ce que nous verrons dans les prochains chapitres, où nous aborderons les questions de transformée de Laplace, puis de Fourier. Nous allons ainsi mettre en évidence des transformations mathématiques, permettant le passage d'une fonction du domaine temporel au domaine fréquentiel, et inversement.

2.7 Exercices

Exercice 1

Soient les systèmes dont le comportement temporel est défini par les équations suivantes. Indiquez si ces systèmes sont linéaires, à temps invariant et causaux ?

- $y(t) = x(t) + 4 \frac{dy}{dt}$
- $y(t) = 2x(t) + 2$
- $y(t) = e^{-t} x(t-2)^2$
- $y(t) = \frac{dx}{dt} + x(t+2)$

**Exercice 2**

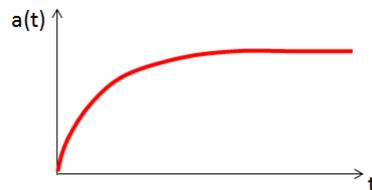
1. On trace les réponses de trois systèmes LTI ((a), (b) et (c)). Proposez une expression mathématique décrivant ces réponses.

2. Calculez la partie réelle des fonctions suivantes et esquissez leur forme temporelle (pour $t > 0$) :

- $x(t) = (1 + j)e^{j \cdot 10t}$
- $y(t) = e^{(-2+j)t} \cdot u(t - 2)$
- $z(t) = e^{(-1+2j)t} + e^{(-1-2j)t}$

Exercice 3

On dispose de la réponse indicielle d'un système linéaire à temps invariant, qui est esquissée ci-dessous. Elle a une forme exponentielle croissante.



Esquissez les réponses de ce système dans les cas suivants :

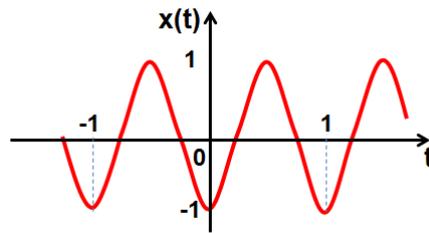
- l'excitation $e(t) = u(t) - u(t - 1)$
- l'excitation $e(t) = t(u(t) - u(t - 2))$
- l'excitation est la dérivée de celle utilisée pour obtenir la réponse indicielle.

Exercice 4

On excite un système linéaire à l'aide du signal suivant : $e(t) = e^{j2\pi t}$. La réponse obtenue, notée $y(t)$, est égale à $y(t) = \frac{1}{2}e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{3})}$.

a. Réécrire la réponse sous la forme $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$, en précisant les valeurs de A, B, C et ϕ .

b. Donnez l'expression de la réponse du système lorsqu'il est excité par le signal ci-dessous.



c. Calculez la réponse du système à l'excitation suivante : $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi t)$.

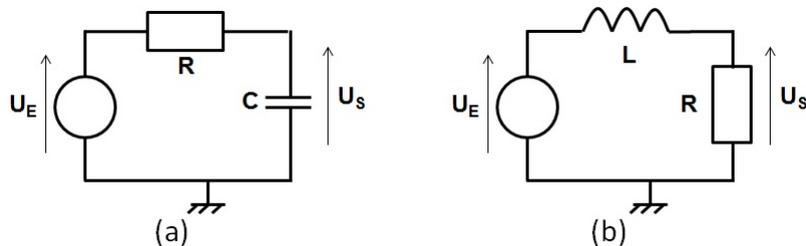
Exercice 5 - Réponse indicielle d'un circuit RC

On reprend le circuit RC dont on a étudié la réponse dans la partie VI.3. On considère deux cas : celui où le condensateur est déchargé initialement, puis celui où il est chargé.

- Calculez la réponse naturelle du circuit lorsque le condensateur est initialement chargé.
- En déduire la réponse impulsionnelle du circuit.
- Calculez la réponse lorsque le circuit est soumis à un échelon de Heaviside d'amplitude E , dans les deux cas (charge initiale absente ou présente).
- En déduire la réponse indicielle du circuit.

Exercice 6

On considère les deux circuits électriques ci-dessous. Pour le circuit (a), la tension initiale ($t=0$) aux bornes du condensateur C est notée U_{C0} . Pour le circuit (b), un courant noté I_L0 traverse la bobine L . La sortie de ces deux circuits est la tension U_S .

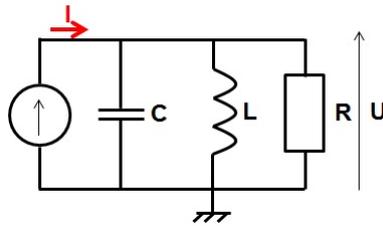


- Déterminez les fréquences et les réponses naturelles de ces deux circuits. Quels sont les ordres de ces deux systèmes ?
- On excite ces deux systèmes à l'aide d'un échelon de Heaviside d'amplitude notée E . Déterminez la réponse indicielle de ces deux circuits.
- Déterminez les fonctions de transfert de ces deux circuits.

Exercice 7 - Fonction de transfert d'un circuit résonant

On reprend le circuit RLC présenté dans la partie IV.4. Celui-ci est excité par un générateur de courant I , comme le montre la figure ci-dessous. On s'intéresse à la tension U aux bornes de ce circuit. On considère que la résistance R est grande et $R \gg \sqrt{\frac{L}{C}}$.

- Déterminez la fonction de transfert de ce circuit. La mettre sous la forme $\frac{Gp}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}$.
- Précisez l'unité de la fonction de transfert.



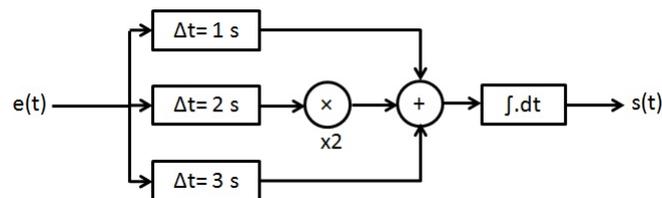
c. Ce circuit est-il stable ?

d. On considère maintenant que le terme α est négligeable et une excitation cosinusoidale du circuit. Y a-t-il une fréquence particulière où la réponse présente un maximum ? Si oui, laquelle ?

e. Donnez l'expression de la réponse temporelle du circuit en régime permanent.

Exercice 8

On considère le système dont le fonctionnement est décrit par le schéma-bloc ci-dessous. Celui-ci transforme un signal d'entrée $e(t)$ et délivre en sortie un signal $s(t)$.



a. Le système est-il linéaire, à temps invariant, causal ?

b. Ecrire l'équation différentielle générale de ce système.

c. Déterminez l'expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système. Esquissez l'allure temporelle de la réponse impulsionnelle.

d. Déterminez l'expression de la fonction de transfert $H(p)$ du système. Précisez les pôles de la fonction de transfert. Que concluez-vous sur sa stabilité ?

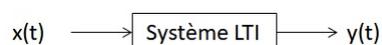


3. Transformée de Laplace

Dans le chapitre précédent, nous avons identifié deux manières de calculer la réponse transitoire d'un système :

- soit en considérant la réponse impulsionnelle et en calculant le produit de convolution dans le domaine temporel
- soit en considérant la fonction de transfert et en réalisant une simple multiplication dans le domaine fréquentiel, nécessitant une excitation exponentielle complexe.

Bien que cette deuxième méthode soit plus simple, elle suppose une excitation d'un type donné. La question posée et illustrée ci-dessous est : peut-on passer directement d'une fonction temporelle à sa forme dans le domaine fréquentiel complexe, même si celle-ci n'est pas une exponentielle complexe ? Nous allons voir que cela est possible, via une transformation mathématique appelée transformée de Laplace. En plus de nous offrir un moyen pratique pour déterminer les réponses des systèmes quel que soit le type d'excitation, nous verrons qu'elle permet de résoudre d'une manière pratique les équations différentielles ordinaires, quel que soit leur ordre (on pourra remarquer qu'il s'agit en fait du même problème).



$$y(t) = L[x](t) \leftrightarrow Y(p) = H(p) \cdot X(p)$$

Transformation
mathématique ?

FIGURE 3.1 – Lien entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert

La transformée de Laplace permet de passer du domaine temporel à son domaine dual, le domaine fréquentiel, dans le cas d'une exponentielle complexe de fréquence complexe quelconque. Dans les chapitres suivants, nous présenterons un autre type de transformation dérivée de la transformée de Laplace : la transformée de Fourier, qui sera très utile pour l'analyse des signaux, ainsi que pour l'étude des systèmes en régime permanent.

Remarque : Dans ce chapitre, on ne considère que des fonctions causales. L'instant d'apparition des signaux se fera en $t = 0$. Pour représenter cette condition, l'ensemble des signaux en entrée et en sortie que nous allons considérer seront multiplier par l'échelon de Heaviside $u(t)$.

3.1 Transformation d'une fonction temporelle au domaine fréquentiel

Dans le domaine temporel, l'entrée et la sortie du système sont reliées par la réponse impulsionnelle $h(t)$ et le produit de convolution. Cela est vrai quel que soit le type d'excitation appliquée en entrée du système. Le passage dans le domaine fréquentiel suppose une excitation exponentielle complexe. Considérons ce cas dans le domaine temporel : la réponse sera donc égale au produit de convolution entre la réponse impulsionnelle et l'excitation exponentielle complexe. Nous considérons dans un premier temps un signal défini sur tout le domaine temporel. Elle peut être modifiée selon la forme donnée par l'équation 3.2.

$$y(t) = h * x(t) = h * \exp(pt) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \exp(p(t - \tau)) d\tau \quad (3.1)$$

$$y(t) = \exp(pt) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \exp(-p\tau) d\tau \quad (3.2)$$

On remarque que la réponse du système est le produit entre l'excitation et un terme intégrale dépendant de la réponse impulsionnelle. On retrouve donc une forme très similaire à celle vue à l'équation 2.38, reliant réponse et excitation exponentielle complexe, via la fonction de transfert. Ce terme intégrale n'est donc rien d'autre que la réponse du système LTI dans le domaine fréquentiel complexe, c'est-à-dire sa fonction de transfert.

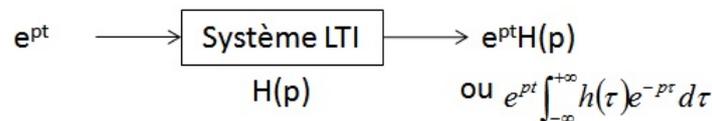


FIGURE 3.2 – Lien via la transformée de Laplace entre l'excitation exponentielle complexe et la réponse d'un système LTI

Nous venons de mettre en évidence une transformation mathématique permettant de passer de la représentation temporelle d'une fonction à sa représentation fréquentielle complexe. Cette transformée s'appelle la transformée de Laplace. Elle est donnée par 3.3 dans le cas général.

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

La démonstration précédente reste valable dans le cas d'un signal causal, défini pour $t > 0$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} h(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (3.4)$$

Remarque : On vient aussi de montrer que la fonction de transfert, exprimée dans le domaine des fréquences complexes p , n'est rien d'autre que la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

3.2 Transformée de Laplace

3.2.1 Définition

La transformée de Laplace est une transformation mathématique, transformant une fonction temporelle en une fonction définie dans le domaine des fréquences complexes p . Nous noterons \mathcal{L} cette transformation. On distingue deux types de transformée de Laplace : bilatérale (3.5) et unilatérale (3.6). Cette dernière s'impose naturellement dès que l'on considère des systèmes causaux ($h(t) = 0$ pour $t < 0$). Dans la suite, comme nous ne traiterons que de systèmes causaux, nous ne considérerons que la transformée de Laplace unilatérale.

$$F(p) = \mathcal{L}[f](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p = \sigma + j\omega \quad (3.5)$$

$$F(p) = \mathcal{L}[f](t) = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p = \sigma + j\omega \quad (3.6)$$

Opérateur de Heaviside s :

Dans la littérature scientifique anglo-saxonne, lorsque la transformée de Laplace est utilisée, l'opérateur p , représentant les fréquences complexes, apparaît rarement. Il est remplacé par un opérateur noté " s " et appelé opérateur de Heaviside en hommage à Oliver Heaviside. Il est l'inventeur des méthodes mathématiques de résolution des équations différentielles pour les circuits électroniques, que nous appelons transformée de Laplace.

3.2.2 Conditions d'existence de la transformée de Laplace et stabilité des systèmes

Il est important de noter que la transformée de Laplace n'existe que si l'intégrale converge. Ceci n'est pas le cas pour toutes les valeurs de p . L'objectif de ce cours n'est pas de faire ce calcul intégrale, mais plutôt de l'utiliser comme outil pour l'étude des systèmes linéaires. Nous utiliserons la plupart du temps des tables contenant les transformées pour les fonctions les plus courantes. Néanmoins, nous allons mettre en œuvre ce calcul à travers un exemple et indiquer les conditions d'existence de la transformée de Laplace. Nous allons mettre en évidence ce que cela signifie du point de vue de la stabilité des systèmes LTI. Par souci de simplification, on dira qu'un système est stable s'il converge vers une valeur finie. Exemple : considérons un système LTI dont la réponse impulsionnelle est définie par la fonction : $h(t) = \exp(\alpha t)u(t)$ où α est un réel quelconque. Calculons sa transformée de Laplace à l'aide de l'équation 3.5 :

$$H(p) = \mathcal{L}[\exp(\alpha t)u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha t)u(t) \cdot \exp(-pt) dt$$

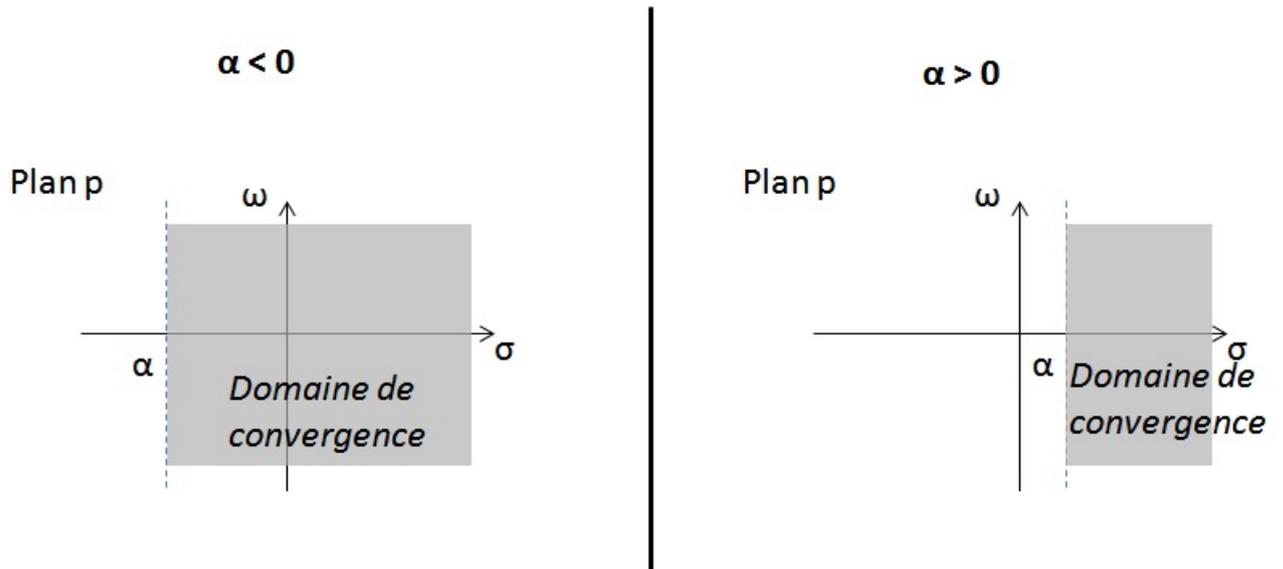
$$H(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-(p - \alpha)t) dt$$

$$H(p) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp(-(p - \alpha)T)}{p - \alpha} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp(-(\sigma - \alpha)T) \exp(-j\omega T)}{p - \alpha}$$

La transformée de Laplace existera si cette intégrale converge. Cela dépend uniquement de la partie réelle σ de la fréquence complexe :

$$F(p) = \begin{cases} \frac{1}{p - \alpha} & \text{si } \sigma > \alpha \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

Si on représente l'excitation en fréquence dans le plan P , il existe un domaine d'existence de la transformée de Laplace appelé domaine de convergence. Il s'agit d'un plan où $\text{Re}(p) = \sigma > \alpha$.

FIGURE 3.3 – Domaine de convergence de la fonction $\exp(\alpha t)$

Nous le représentons dans deux cas différents : $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, et allons analyser sa signification concrète. Le domaine de convergence indique, dans le cas d'une excitation exponentielle complexe, l'ensemble des fréquences complexes pour lequel le système convergera. Pour s'en convaincre, considérons une excitation exponentielle, de fréquence complexe $p_0 = \beta + j\omega$. Reprenons la forme initiale dérivée de la réponse impulsionnelle.

$$y(t) = \exp(p_0 t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \exp(-p_0 \tau) d\tau$$

$$y(t) = \exp((\beta + j\omega)t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha \tau) \exp(-(\beta + j\omega)\tau) d\tau$$

$$y(t) = \exp((\beta + j\omega)t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\beta - \alpha + j\omega)\tau) d\tau$$

$$y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\exp((\beta + j\omega)t) (\exp(-(\beta - \alpha + j\omega)T) - 1)}{\beta - \alpha + j\omega} \quad (3.8)$$

Cette fonction converge si la partie réelle β de la fréquence de l'excitation est supérieure à α , autrement dit si la fréquence complexe d'excitation appartient au domaine de convergence, mais aussi si $\beta < 0$. Dans le cas contraire, le signal d'entrée va diverger pour $t > 0$. Cette double condition sur β n'est possible que si $\alpha < 0$, qui est donc une condition nécessaire pour garantir la stabilité du système.

Cas d'une excitation harmonique :

Cette situation correspond au cas où $\beta = 0$. Le système sera stable uniquement si, dans le plan p , l'axe des imaginaires appartient au domaine de convergence. Dans le chapitre consacré à la transformée de Fourier, nous verrons qu'elle est équivalente à une transformée de Laplace, mais pour une fréquence purement complexe $\beta = 0$. Si l'axe des imaginaires appartient au domaine de convergence, alors la transformée de Fourier de la fonction pourra exister.

3.2.3 Pôles et zéros d'une fonction de transfert

Reprenons l'exemple précédent. Comme nous l'avons introduit dans le chapitre précédent, α correspond à un pôle de la réponse du système. Sa stabilité est liée à sa partie réelle.

Toutes les transformées de Laplace que l'on considère peuvent se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle, où le numérateur $N(p)$ et dénominateur $D(p)$ sont des polynômes. Eux-mêmes peuvent être exprimés en fonction de leurs racines appelés zéros et pôles respectivement. Ceux-ci correspondent à des fréquences complexes particulières qui :

- annulent la fonction de transfert dans le cas des zéros p_{zi}
- font tendre la fonction de transfert vers l'infini dans le cas des pôles p_{pj}

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \Rightarrow F(p) = G \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{zi})}{\prod_{j=1}^n (p - p_{pj})} \quad (3.9)$$

où G est le gain de la fonction de transfert. Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 2, la position des pôles nous donne une indication sur l'allure temporelle de la fonction de transfert (réponse naturelle). Quel que soit le système linéaire considéré, la position de ces pôles va déterminer la stabilité du système. Vous approfondirez ces concepts dans le cours d'automatique.

3.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Dans cette partie, nous allons passer en revue plusieurs des propriétés importantes de la transformée de Laplace, qui facilitent les calculs de la transformée de Laplace et les applications associées. Nous ne démontrerons pas l'ensemble de ces propriétés.

3.3.1 Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire. La transformée de Laplace d'une somme pondérée de fonction est la somme des transformées de Laplace individuelle de ces fonctions, pondérées de la même manière. Elle vérifie donc la relation suivante :

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \longleftrightarrow a \cdot F(p) + b \cdot G(p) \quad , \quad \text{avec } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ et } G(p) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (3.10)$$

3.3.2 Théorème du retard

Supposons que l'on connaisse la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction causale $f(t)$, qui est nulle pour $t < 0$. Si on a retardé de t_0 cette fonction, elle devient $f(t-t_0)$ et s'annule pour tout $t < t_0$. Calculons sa transformée de Laplace à partir de (3.6) et appliquons le changement de variable $w = t-t_0$. On montre que la transformée de Laplace de la fonction retardée est la transformée de Laplace non retardée multipliée par e^{-pt_0} .

$$F_{t_0}(p) = \mathcal{L}[f(t-t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0) \exp(-pt) dt$$

$$F_{t_0}(p) = \int_0^{+\infty} f(w) \exp(-p(w+t_0)) dw = \int_0^{+\infty} f(w) \exp(-pw) \exp(-pt_0) dw$$

$$F_{t_0}(p) = F(p) \cdot \exp(-pt_0) \quad (3.11)$$

3.3.3 Théorème du changement d'échelle

Supposons que l'on connaisse la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction causale $f(t)$. Dilatons l'échelle de temps de cette fonction par un facteur réel k . La fonction devient $f(kt)$. Calculons la transformée de Laplace de cette version dilatée de $f(t)$, en appliquant le changement de variable $w = kt$.

$$F_k(p) = \mathcal{L}[f(kt)] = \int_{t_0}^{+\infty} f(kt) \exp(-pt) dt = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{k} f(w) \exp\left(-\frac{p}{k}w\right) dw$$

$$F_k(p) = \frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{p}{k}\right) \quad (3.12)$$

3.3.4 Translation dans le domaine fréquentiel

Un décalage d'une valeur p_1 dans le domaine de Laplace conduit à une multiplication par $e^{p_1 t}$ dans le domaine temporel.

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}[e^{p_1 t} f(t)] = F(p - p_1) \quad (3.13)$$

Dans le domaine fréquentiel ($\alpha = 0$), cela est équivalent à une translation du spectre. Ce procédé est bien connu en télécommunication, car il est utilisé pour moduler les signaux à transmettre.

3.3.5 Dérivation dans le domaine temporel

Considérons le cas d'une fonction $f(t)$ continue non nulle pour $t > 0$. La transformée de Laplace de la dérivée de cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+) \quad \text{avec } f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad (3.14)$$

On remarque que l'opérateur dérivée correspond à une multiplication de la transformée de Laplace par p . Cependant, il est nécessaire de tenir compte de la condition initiale $f(0^+)$.

Il est possible de généraliser cette relation au cas où l'on dérive N fois la fonction. L'expression devient :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0^+) - p^{n-2} \cdot \frac{df}{dt}(0^+) - \dots - p \frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(0^+) - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0^+) \quad (3.15)$$

Le calcul nécessite de connaître les conditions initiales non seulement sur la valeur de la fonction mais aussi pour ses $(n-1)$ premières dérivées.

3.3.6 Dérivation dans le domaine des fréquences complexes p

Dériver une fonction dans le domaine de Laplace revient à multiplier cette fonction par $-t$ dans le domaine temporel.

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}[-t \cdot f(t)] = \frac{dF(p)}{dp} \quad (3.16)$$

Cette propriété peut se généraliser au cas où l'on dérive N fois la fonction dans le domaine de Laplace, qui revient à multiplier la fonction temporelle par le terme $(-t)^N$.

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}[(-t)^N \cdot f(t)] = \frac{d^N F(p)}{dp^N} \quad (3.17)$$

3.3.7 Intégration temporelle

Considérons le cas d'une fonction $f(t)$ continue non nulle pour $t > 0$. La transformée de Laplace de son intégrale de 0 à t est donnée par :

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(p)}{p} \quad (3.18)$$

Cette propriété peut s'étendre au cas où on intègre N fois la fonction temporelle :

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}\left[\int \dots \int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(p)}{p^n} \quad (3.19)$$

3.3.8 Théorème de la valeur initiale

On considère une fonction $f(t)$ continue non nulle pour $t > 0$. On peut montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) \quad (3.20)$$

3.3.9 Théorème de la valeur finale

De la même manière, on peut montrer que la fonction $f(t)$ tend de manière asymptotique vers la valeur suivante :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (3.21)$$

Cette propriété, couplée à celle de l'intégration temporelle, permet aussi de calculer l'aire sous la courbe temporelle entre 0 et une valeur $t > 0$:

$$\int_{0^-}^t f(t)dt = F(0) \quad (3.22)$$

3.3.10 Multiplication et produit de convolution

Multiplication et produit de convolution (2.34) sont deux opérations complémentaires dans les domaines temporelles et de Laplace. On peut ainsi écrire les deux propriétés suivantes :

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = F * G(p) \quad (3.23)$$

$$\mathcal{L}[f * g(t)] = F(p) \cdot G(p) \quad (3.24)$$

Avec cette dernière propriété, on retrouve la relation vue entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle. Dans le domaine temporel, la réponse d'un système correspond au produit de convolution entre l'excitation et la réponse impulsionnelle. Avec une excitation exponentielle complexe, cette relation est équivalente au produit entre l'excitation exprimée dans le domaine de Laplace et la fonction de transfert, soit la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

3.3.11 Fonctions causales avec N répétitions

On considère une fonction $f_1(t)$, dite génératrice, que l'on répète N fois de manière périodique pour former une nouvelle fonction causale $f(t)$. La période est notée T . La fonction $f(t)$ s'écrit :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(t - kT)$$

On note $F_1(p)$ la transformée de Laplace de la fonction génératrice. A partir du théorème du retard, on peut calculer la transformée de Laplace de la somme des N termes précédents.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = F_1(p)(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \dots + e^{-(N-1)Tp})$$

On retrouve une série de N termes exponentiels mis à la puissance k, qui peut se simplifier selon la relation ci-dessous.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = F_1(p) \frac{1 - e^{-(N-1)Tp}}{1 - e^{-Tp}} \quad (3.25)$$

3.3.12 Fonctions périodiques causales

La propriété précédente peut être réutilisée pour déterminer la transformée de Laplace d'une fonction causale périodique, de période T et générée à partir d'une fonction génératrice $f_1(t)$. La fonction périodique s'écrit : $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(t - kT)$.

On en déduit la transformée de Laplace de la fonction en remarquant que $|e^{-kTp}| < 1$ car la partie réelle de p est positive pour garantir la convergence.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_1(p) \frac{1 - e^{-(N-1)Tp}}{1 - e^{-Tp}} = F_1(p) \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \quad (3.26)$$

Toute fonction exprimée dans le domaine de Laplace où apparaît le terme $\frac{1}{1 - e^{-Tp}}$ correspond à la transformée de Laplace d'une fonction périodique de période T.

3.4 Transformée de Laplace des fonctions courantes

Le tableau 3.1 donne la transformée de Laplace des fonctions causales les plus courantes, et pour lesquelles des formes mathématiques simples existent. Pour la plupart, aucune démonstration n'est donnée, mais les transformées peuvent être retrouvées. Nous nous limiterons à deux exemples de mise en forme de la transformée de Laplace pour deux formes temporelles courantes, sachant que nous avons déjà vu celle d'une fonction exponentielle.

Exemple 1 : échelon unitaire $f(t) = u(t)$

$$F(p) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) dt = \left[-\frac{\exp(pt)}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Exemple 2 : fonction cosinusoidale causale

$$f(t) = \cos(\omega t) u(t)$$

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) u(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)}{2} dt$$

$$F(p) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\exp((j\omega - p)t) + \exp(-(j\omega + p)t)) dt = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\exp((j\omega - p)t)}{j\omega - p} \right]_0^{+\infty} - \left[\frac{\exp((j\omega - p)t)}{j\omega - p} \right]_0^{+\infty} \right)$$

$$F(p) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{j\omega - p} + \frac{1}{j\omega + p} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (3.27)$$

Tableau récapitulatif des transformées de Laplace :

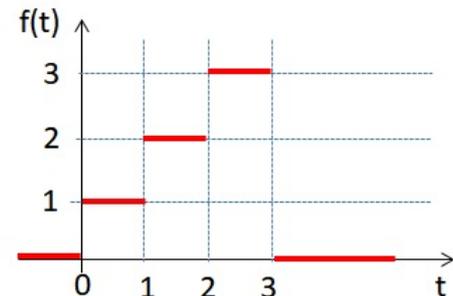
TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif des transformées de Laplace usuelles

Fonctions temporelles $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p)$
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Fonction rampe $f(t) = t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Fonction rampe polynomiale $f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{p^n}$
Fonction exponentielle $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$f(t) = t e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$
Fonction cosinus $f(t) = \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Fonction sinus $f(t) = \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Fonction cosinus amorti $f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Fonction rampe limitée $f(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau} u(t), & \text{si } t \leq \tau \\ A \cdot u(t) \end{cases}$	$A \frac{1-e^{-p\tau}}{p^2\tau}$

A partir de cette table, il est possible de dériver les transformées de Laplace pour d'autres fonctions temporelles. En effet, il suffit d'identifier des formes dont la transformée de Laplace est connue et utiliser les différentes propriétés de la transformée pour en déduire l'expression de la transformée de Laplace.

Exemple :

Soit la fonction temporelle $f(t)$ dont l'évolution temporelle est présentée ci-contre. Déterminez la transformée de Laplace de cette fonction.



La fonction discontinue ci-dessus peut être exprimée sous la forme d'une somme de fonctions échelons. En repérant les instants de transition et les amplitudes des paliers, celle-ci s'écrit : $f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-3)$. La transformée de Laplace étant linéaire, la transformée de Laplace de $f(t)$ sera la somme des transformées de chaque terme formant l'expression de $f(t)$. En identifiant la transformée de Laplace de la fonction échelon et en appliquant le théorème du retard, on détermine l'expression de la transformée de Laplace de $f(t)$:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t)] + \mathcal{L}[u(t-1)] + \mathcal{L}[u(t-2)] - 3\mathcal{L}[u(t-3)]$$

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} - 3 \frac{e^{-3p}}{p}$$

3.5 Transformée de Laplace inverse

Du point de vue pratique, le but de la transformée de Laplace est de fournir un outil simple pour le calcul des réponses temporelles des systèmes linéaires. Elle permet de calculer la représentation

fréquentielle d'une fonction à partir de sa représentation dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, le calcul de la réponse du système est facilité en passant par la fonction de transfert. Cependant, si nous ne disposons pas d'une transformation mathématique permettant de réaliser le passage inverse, cette approche perd de son intérêt. Fort heureusement, cet outil existe. Il s'agit de la transformée de Laplace inverse, que nous allons rapidement présenter. Elle permet de transformer une fonction définie dans le domaine des fréquences complexes p en une fonction définie dans le domaine temporel. Nous la noterons \mathcal{L}^{-1} . Comme la transformée de Laplace, la transformée de Laplace inverse est une fonction linéaire.

3.5.1 Méthode pratique d'utilisation

La transformée de Laplace inverse est donnée par la formule de Bromwich-Mellin, où σ est choisi pour que l'intégrale converge.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) \exp(pt) dp \quad (3.28)$$

Dans la pratique, cette formule est difficile à mettre en œuvre car elle nécessite de calculer une intégrale dans le plan complexe. Ceci dépasse le cadre de ce cours et nous n'effectuerons pas de calcul de cette transformée. Dans ce cours, nous privilégierons la méthode utilisée en pratique, basée sur les tables reliant des fonctions courantes et leur transformée de Laplace, comme le tableau 3.1. Il s'agit de rechercher des paires de transformées. À partir de la fonction $F(p)$, on identifie des fonctions connues et on déduit la fonction temporelle correspondante. Dans le cas de fonctions compliquées, le calcul de la forme temporelle passe par des approches basées sur le calcul numérique, non détaillées ici. Dans de nombreux cas pratiques, les expressions des transformées de Laplace peuvent être données sous la forme d'une fraction rationnelle, pour laquelle on ne dispose pas directement de la fonction temporelle correspondante. Il est nécessaire de transformer d'abord l'expression de la transformée de Laplace avant d'identifier des formes courantes. On utilisera notamment une technique de décomposition en pôles et en résidus.

3.5.2 Décomposition pôles-résidus

Comme nous l'avons dans la partie II.3, la plupart des transformées de Laplace peuvent être mises sous la forme d'une fonction rationnelle, rapport de deux polynômes faisant apparaître leurs racines (pôles et zéros). Cependant, il n'existe sans doute pas une paire de transformées simples pour toutes les fonctions rationnelles. Pour appliquer la méthode précédente, il est nécessaire de décomposer cette fonction rationnelle en éléments plus simples, dont on connaît la paire de transformées. Il est possible de montrer que toute fonction rationnelle de deux polynômes peut s'écrire sous la forme d'une somme d'éléments simples, appelées fractions partielles ne dépendant que des pôles et de constantes appelées résidus. Cette décomposition s'appelle la décomposition pôles-résidus, dont la forme est illustrée par 3.29. Cette décomposition ne fonctionne qu'avec des fractions dites "propres" pour lesquelles le nombre n de pôles est supérieur ou égal au nombre m de zéros. Dans ce cas, la fraction rationnelle peut se décomposer en n termes dont il faut déterminer les résidus A_n .

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = A \frac{(p - p_{zm}) \dots (p - p_{z1})}{(p - p_{pn}) \dots (p - p_{p1})} = \frac{A_1}{p - p_{p1}} + \frac{A_2}{p - p_{p2}} + \dots + \frac{A_n}{p - p_{pn}} \quad (3.29)$$

On voit immédiatement l'intérêt de cette approche car on remarque qu'on identifie immédiatement la paire de transformée simple. En effet, la transformée de Laplace inverse de la fraction partielle est une fonction exponentielle, dépendante du pôle.

Cas d'une fraction impropre (n < m) :

Avant de voir comment réaliser cette décomposition pôles-résidus, traitons d'abord le cas des fractions impropres (plus de zéros que de pôles). La décomposition pôles-résidus n'est pas directe. Il est cependant possible d'exprimer cette fraction impropre comme la somme d'un terme (qui ne sera pas une fraction) et d'une fraction propre (3.30). Il est indispensable que le premier terme ait une transformée de Laplace inverse connue.

$$\frac{N(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)}, \text{ si } n < m \quad (3.30)$$

$Q(p)$ n'est rien d'autre que le quotient de la division entre $N(p)$ et $D(p)$, tandis que $R(p)$ est le reste. Cette décomposition consiste donc à faire une division entre deux polynômes. Illustrons-le par un exemple.

Exemple : décomposer la fonction $\frac{2p^3+p^2-4p}{p^2+p-2}$ pour faire apparaître une fraction propre.

La division est décrite ci-dessous. Elle s'effectue comme suit : on identifie chaque terme du quotient afin d'éliminer le terme de plus haut degré du numérateur. Par exemple, le terme de plus haut degré de $Q(p)$, $2p$, est choisi de manière à éliminer $2p^3$ du numérateur. Comme il ne reste plus que p^2 , le prochain terme de $Q(p)$ est -1 . Le calcul s'arrête ensuite. On a déterminé $Q(p)$ et $R(p)$.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{N(p)=} & 2p^3 + p^2 - 4p \\ & -(2p^3 + 2p^2 - 4p) \\ \hline & -p^2 \\ & -(-p^2 - p + 2) \\ \hline & \mathbf{R(p)} \quad p - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} p^2 + p - 2 = \mathbf{D(p)} \\ \hline 2p - 1 \\ \mathbf{Q(p)} \end{array} \right.$$

On peut donc écrire $\frac{2p^3+p^2-4p}{p^2+p-2} = (2p-1) + \frac{p-2}{p^2+p-2} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)}$. Le terme $\frac{R(p)}{D(p)}$ est une fraction propre, tandis qu'on peut associer à $Q(p)$ une transformée de Fourier simple, en l'occurrence $2tu(t) - \delta(t)$ (voir tableau 3.1).

Nous considérons maintenant que nous disposons d'une fraction propre. Voyons comment effectuer facilement la décomposition pôles-résidus. Un préalable consiste à disposer des zéros et des pôles de la fonction rationnelle, afin de pouvoir écrire l'égalité de l'équation 3.30. Il existe plusieurs méthodes de décomposition pôles-résidus, nous n'en mentionnerons que deux.

Association des fractions partielles

La première méthode consiste à partir de la forme en fractions partielles, puis de les associer pour revenir à la forme initiale de la fonction rationnelle, mais exprimée avec les résidus. On obtient ainsi n équations où les n inconnues sont les résidus. Prenons l'exemple suivant, où les pôles sont égaux à 1 et -2 :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2}$$

On cherche les résidus A et B . En les associant, on obtient $\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{A(p+2)+B(p-1)}{p^2+p-2} = \frac{(A+B)p+(2A-B)}{p^2+p-2}$. On détermine les résidus en résolvant le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=-2 \end{cases}$$

On trouve les solutions suivantes : $A = -\frac{1}{3}$ et $B = \frac{4}{3}$. Cette approche simple peut devenir fastidieuse lorsque le nombre de pôles s'accroît.

Méthode du cache

Une méthode alternative est la méthode du cache. Elle consiste à annuler un pôle pour déterminer le résidu associé, et répéter l'opération pour chaque pôle. Par exemple, supposons que l'on cherche le résidu A_i associé au pôle p_{pi} . On multiplie la fraction par $(p - p_{pi})$. Dans la fraction rationnelle, l'effet du pôle va disparaître. En prenant $p = p_{pi}$, on fera disparaître les autres fractions partielles et on isolera ainsi le résidu A_i . Pour l'illustrer, reprenons l'exemple précédent :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{p-2}{(p-1)(p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2}$$

Commençons par déterminer le résidu A associé au pôle $p=1$. On multiplie la fraction rationnelle par $(p-1)$ et on obtient :

$$\frac{p-2}{(p+2)} = A + \frac{B(p-1)}{p+2}$$

En fixant $p = 1$, on détermine $A = \frac{1-2}{(1+2)} = -\frac{1}{3}$. On répète l'opération pour déterminer l'autre résidu associé au pôle $p=-2$. On multiplie la fraction rationnelle par $(p+2)$ et on obtient :

$$\frac{p-2}{(p-1)} = \frac{A(p+2)}{p-1} + B$$

En fixant $p = -2$, on détermine $A = \frac{-2-2}{(-2-1)} = \frac{4}{3}$. La décomposition pôles-résidus s'écrit donc :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{-1}{3(p-1)} + \frac{4}{3(p+2)}$$

Sous cette forme, on identifie facilement la transformée de Laplace inverse, qui est égale à $(-\frac{1}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{-2t})u(t)$.

3.6 Applications

Nous allons présenter deux applications où l'utilisation de la transformée de Laplace et de son inverse trouve tout leur intérêt :

- la résolution d'équations différentielles
- le calcul de la réponse transitoire de systèmes linéaires

3.6.1 Résolution d'équations différentielles ordinaires

La transformée de Laplace constitue un outil puissant de résolution des équations différentielles ordinaires, qui ne dépendent que d'une variable. De manière générale, elles peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$L[t, x(t)] = f(t) \tag{3.31}$$

où $x(t)$ est l'inconnue, L un opérateur linéaire quelconque (superposition des effets d'opérateurs proportionnels, intégrateurs et différenciateurs) et $f(t)$ une fonction quelconque. Dans le domaine des fréquences complexes, l'effet d'une dérivée et d'une intégration se résument à une multiplication et une division par la fréquence p . Ainsi, en passant dans le domaine fréquentiel, l'équation différentielle se transforme en une simple équation algébrique. En isolant le terme $X(p)$ et en utilisant la transformée de Laplace inverse (à condition qu'elle existe), on pourra déterminer la solution $x(t)$ de l'équation.

Exemple :

soit l'équation différentielle suivante : $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$, où $y(t)$ est une fonction causale. On a les conditions initiales suivantes : $y(0^+) = 1$ et $y'(0^+) = -2$. Résoudre l'équation différentielle.

À l'aide du théorème de la dérivation, l'équation différentielle peut être exprimée dans le domaine de Laplace.

$$p^2 Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) + 4(pY(p) - y(0^+)) + 4Y(p) = 0$$

En isolant $Y(p)$ et en intégrant les valeurs des conditions initiales, on détermine l'expression de la solution $Y(p)$ dans le domaine de Laplace.

$$(p^2 + 4p + 4)Y(p) = y'(0^+) + (p + 4)y(0^+)$$

$$Y(p) = \frac{y'(0^+) + (p + 4)y(0^+)}{p^2 + 4p + 4} = \frac{p + 2}{(p + 2)^2} = \frac{1}{p + 2}$$

On identifie sans difficulté la fonction temporelle associée à cette transformée de Laplace à l'aide du tableau 3.1.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = e^{-2t}u(t)$$

On vérifie que cette solution satisfait bien aux conditions initiales fixées et est une solution de l'équation différentielle.

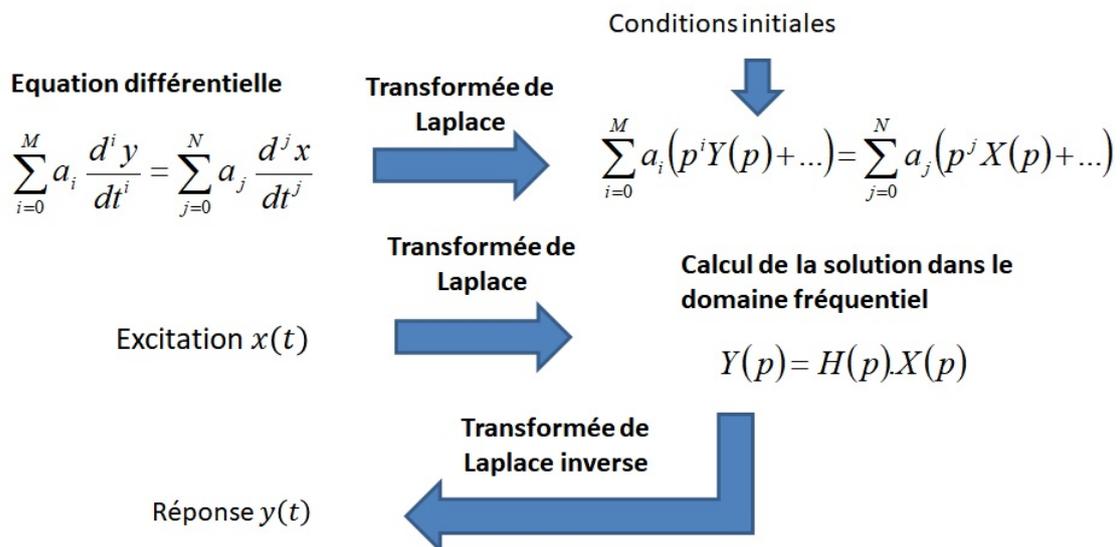
3.6.2 Calcul de la réponse transitoire d'un système linéaire

FIGURE 3.4 – Méthodologie de résolution d'une équation différentielle ordinaire basée sur la transformée de Laplace

Comme nous l'avons vu avec l'équation générale du système linéaire (2.7), le comportement transitoire d'un système est dicté par une équation différentielle. Déterminer la réponse temporelle à une excitation donnée revient à résoudre cette équation différentielle. Le problème est donc équivalent au précédent et la transformée de Laplace constitue encore un outil de résolution

adapté à ce genre de problème. Supposons que nous disposions de la fonction de transfert $H(p)$ du système et que l'on recherche la réponse $y(t)$ à une excitation $x(t)$ dont l'expression est donnée. La première étape consiste à déterminer la transformée de Laplace $X(p)$ de l'excitation. La réponse du système dans le domaine fréquentiel $Y(p)$ est directement le produit de la fonction de transfert et de l'excitation $X(p)$. Ensuite, la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$ permet de retrouver l'expression de la réponse temporelle $y(t)$. Il est bien entendu indispensable de prendre en compte les conditions initiales du système, qui vont intervenir dans la réponse naturelle du système. Si l'expression de la fonction de transfert ne les intègre pas, il est indispensable de repartir de l'équation différentielle décrivant le système et établir la fonction de transfert en intégrant l'effet des conditions initiales. La méthodologie de calcul est résumée à la figure 3.4.

Exemple : réponse d'un circuit RC à un échelon

On reprend l'exemple du circuit RC (passe haut) vu dans le chapitre précédent, pour lequel nous avons calculé la réponse harmonique. Le circuit est présenté ci-dessous. On considère qu'il est excité par un échelon d'amplitude E en $t = 0$, et que le condensateur est initialement chargé (la tension initiale à ses bornes est notée U_{C0}). On souhaite déterminer la réponse du circuit, correspondant à la tension aux bornes de la résistance.

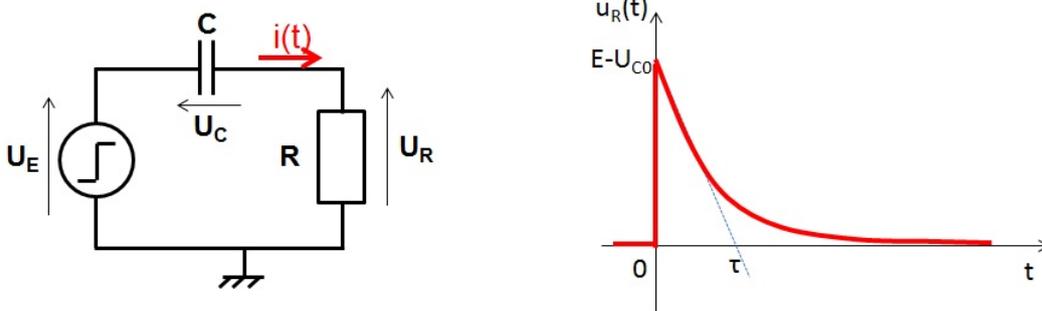


FIGURE 3.5 – Circuit RC étudié (à gauche) et réponse à un échelon (à droite)

L'excitation du circuit s'écrit : $u_E(t) = Eu(t)$. Dans le domaine de Laplace, elle s'exprime : $U_E(p) = \frac{E}{p}$. Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé l'équation différentielle liant l'excitation et la réponse du circuit. Nous allons la reprendre pour déterminer non seulement la fonction de transfert du circuit, mais aussi intégrer la condition initiale sur la charge du condensateur. On note $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt} = \frac{U_R}{\tau} + \frac{dU_R}{dt} \quad (3.32)$$

Le passage dans le domaine de Laplace de cette équation différentielle donne :

$$pU_E(p) - U_E(0^+) = \frac{U_R(p)}{\tau} + pU_R(p) - U_R(0^+)$$

$$(p + \frac{1}{\tau})U_R(p) + U_E(0^+) - U_R(0^+) = pU_E(p)$$

En remarquant que $U_E(0^+) - U_R(0^+)$ est équivalent à la tension initiale $U_C(0^+) = U_{C0}$ aux bornes du condensateur, l'équation s'écrit sous la forme ci-dessous. Le premier terme correspond à l'effet de l'excitation "filtré" par la fonction de transfert du circuit. Le second terme est lié à la présence d'une charge initiale aux bornes du condensateur.

$$U_R(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{\tau}} U_E(p) - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} U_C(0^+) = H(p)U_E(p) - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} U_{C0}$$

En intégrant l'expression de l'excitation, puis en effectuant la transformée de Laplace inverse, on détermine la réponse du circuit (3.33). Son tracée est présenté à la figure 3.5.

$$u_R(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)U_E(p)] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}U_{C0}\right]$$

$$u_R(t) = E\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right] - U_{C0}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right]$$

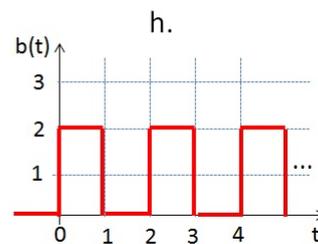
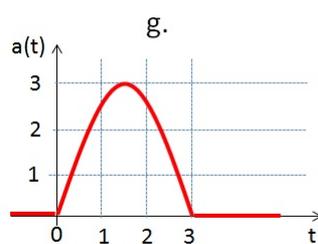
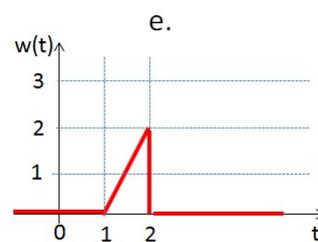
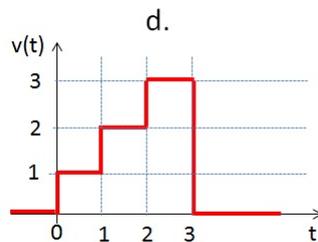
$$u_R(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{RC}}u(t) \quad (3.33)$$

3.7 Exercices

Exercice 1

Déterminez les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

- $x(t) = e^{-2t}u(t-1)$
- $y(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$
- $z(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)u(t)$



Exercice 2

Déterminez les expressions temporelles des fonctions suivantes :

- $X(p) = \frac{p-4}{p^2+16}$
- $Y(p) = \frac{p^2+3p+3-\frac{6}{p}}{p^2}$
- $Z(p) = \frac{p^2+4p+4}{p^2+2p+2}$
- $W(p) = \frac{p-1+e^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}$. Tracez cette fonction.

Exercice 3

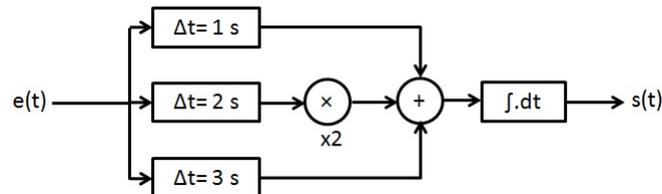
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $x'' + 2x' + x = e^{-t}u(t)$, avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

b. $x'' + 6x' + 8x = \delta(t)$ avec $x(0)=1$ et $x'(0)=3$.

Exercice 4

On reprend l'exercice 8 du chapitre 2.



a. Écrivez la fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace.

b. Calculez la réponse indicielle du système. On supposera que les conditions initiales de tous les nœuds internes du système sont nulles.

Exercice 5

On considère un circuit électrique, dont le courant $i(t)$ est donné par l'équation ci-dessous.

$$e(t) = \frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 10i(t)$$

On considère l'excitation suivante $e(t) = 6e^{-3t}u(t)$. Les conditions initiales du circuit sont : $i(0) = 3$ A et $\frac{di}{dt}(0) = 3$ A/s.

a. Établir l'expression du courant dans le domaine de Laplace.

b. En déduire l'expression temporelle du courant $i(t)$.

c. Vérifiez, en utilisant les expressions du courant dans le domaine de Laplace, puis dans le domaine temporel, que la condition initiale du courant est respectée. Déterminez ensuite les conditions finales.

Exercice 6 - Chute libre

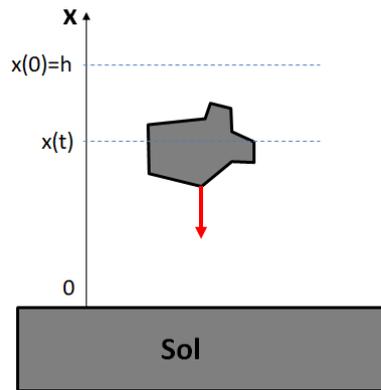
On considère un objet de masse m , placé initialement à une hauteur h au-dessus du sol. En $t = 0^-$, sa vitesse est supposée nulle. On note g l'accélération du champ de pesanteur terrestre. On étudie dans cet exercice son mouvement en chute libre ($t > 0$).

1. Dans un premier temps, on néglige l'effet des frottements de l'air. Établir le bilan des forces s'exerçant sur l'objet lorsqu'il est en chute libre. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir une équation différentielle reliant la position $x(t)$ de l'objet et l'accélération g .

2. Exprimez cette équation différentielle dans le domaine de Laplace.

3. En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminez l'expression donnant l'évolution temporelle de la position $x(t)$ de l'objet.

4. Dans un second temps, on considère les frottements de l'objet dans l'air. On suppose que ces frottements restent faibles et qu'ils peuvent être modélisés par une loi linéaire où la force des frottements $\vec{F}_f = -k \cdot \vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur vitesse. k est une constante de frottement linéaire.



Reprendre la question 1 en prenant en compte les frottements de l'air.

5. Exprimez cette équation différentielle dans le domaine de Laplace.

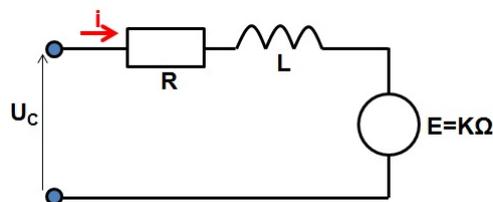
6. En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminez l'expression donnant l'évolution temporelle de la position $x(t)$ de l'objet.

7. A réutilisant le résultat de la question 5, déterminez l'expression donnant l'évolution de la vitesse de chute de l'objet.

8. En considérant des frottements quadratiques, pourrait-on déterminer l'expression de l'évolution temporelle de la position de l'objet en suivant la méthode précédente ?

Exercice 7 - Réponse d'un moteur à courant continu à aimants permanents

Le fonctionnement d'un moteur est gouverné par un modèle électromécanique, se présentant sous la forme de plusieurs équations différentielles reliant grandeurs électriques et mécaniques. Dans cet exercice, nous allons étudier le modèle simplifié d'un moteur à courant continu à aimants permanents. La figure ci-dessous présente le modèle électrique équivalent de l'induit. Celui-ci est modélisé par un circuit RL et est excité par une tension de commande notée U_C . Lorsque le moteur tourne, une force contre électromotrice (fcem) E est induite, qui est proportionnelle à la vitesse angulaire du moteur Ω . Le courant i circulant dans l'induit produit un couple moteur C_m , selon la



même constante de proportionnalité K que celle liant la fcem et la vitesse de rotation du moteur. A ce couple moteur s'opposent plusieurs sources de couples résistants C_R :

- l'inertie du moteur, donnée par le moment d'inertie J
- les frottements visqueux, caractérisés par le coefficient de frottement visqueux f

L'équation mécanique du moteur s'écrit alors :

$$C_m = C_R = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega$$

Nous cherchons à déterminer la vitesse de rotation du moteur en fonction de l'excitation appliquée.

Dans cet exercice, on considèrera les valeurs suivantes : $r=0.2 \Omega$, $L = 0.2 \text{ mH}$, $K = 0.057 \text{ N.m/A}$, $J = 650.10^{-7} \text{ kg.m}^2$, $f = 2.3.10^{-5} \text{ N.m/rad.s}^{-1}$. On suppose que le moteur est initialement à l'arrêt.

- Etablir l'équation différentielle reliant la vitesse de rotation et l'excitation U_C du moteur.
- Déterminez la fonction de transfert du moteur dans le domaine de Laplace. Exprimez-la sous la forme $\frac{G}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}$.
- Calculez les pôles du système. Est-il stable ?
- En $t = 0$, on applique une commande de type échelon unitaire d'amplitude $U_{C0} = 10 \text{ V}$. Déterminez l'expression du profil temporel de la vitesse angulaire.
- Esquissez le profil temporel de la vitesse angulaire. En régime permanent, quelle est la valeur de la vitesse ?



4. Filtrage

Un filtre est un dispositif visant à modifier le contenu fréquentiel d'un signal. Une utilisation courante est de supprimer d'un signal des composantes fréquentielles indésirables (ou, inversement, d'extraire de ce signal certaines composantes utiles). La figure 4.1 illustre ce type d'utilisation. Le graphique à gauche présente un signal digital corrompu par un bruit aléatoire important. La présence de ce bruit est indésirable, car il risque de corrompre l'interprétation de ce signal. Afin d'éviter toute erreur de décodage de ce signal, un filtre doit être synthétisé pour supprimer ce bruit, sans trop affecter le signal utile. L'utilisation d'un filtre est possible si le signal utile et le bruit occupent des bandes de fréquence différentes. Un outil d'analyse du signal, comme la transformée de Fourier que nous aborderons dans le prochain chapitre, permet de déterminer l'occupation fréquentielle des signaux.

Dans l'exemple ci-dessous, le signal utile a une fréquence de 5 Hz. Le spectre du signal bruité est présenté à la figure 4.2. Le spectre du signal utile se situe principalement en dessous de 100 Hz. Le bruit est large bande, mais présente quatre composantes spectrales importantes au-dessus de 100 Hz. Pour éliminer ce bruit, on dimensionne un filtre passe-bas d'ordre 2 avec une fréquence de coupure de 100 Hz. L'effet de ce filtre sur le signal est présenté sur la partie droite de la figure 4.1. La présence du bruit n'est quasiment plus discernable. Comme le confirme le spectre du signal filtré (4.2), le filtre a fortement atténué le spectre au-dessus de 100 Hz. On peut remarquer que le filtre affecte aussi la forme du signal utile, mais cet effet reste négligeable et ne contribuera pas à une erreur d'interprétation du signal.

Ce chapitre est dédié au filtre linéaire à temps invariant et leur analyse en régime harmonique. Les filtres n'ont aucune différence par rapport aux systèmes LTI vues précédemment. La différence vient de leur utilisation, qui nécessite une analyse dans le domaine fréquentiel. La connaissance de la fonction de transfert du filtre est donc centrale. En régime harmonique, nous la noterons $H(\omega)$ ou $H(f)$.

Dans ce chapitre, nous présenterons les outils et les termes usuels permettant de caractériser les filtres. Nous introduirons un outil d'analyse graphique : le diagramme de Bode et son tracé asymptotique.

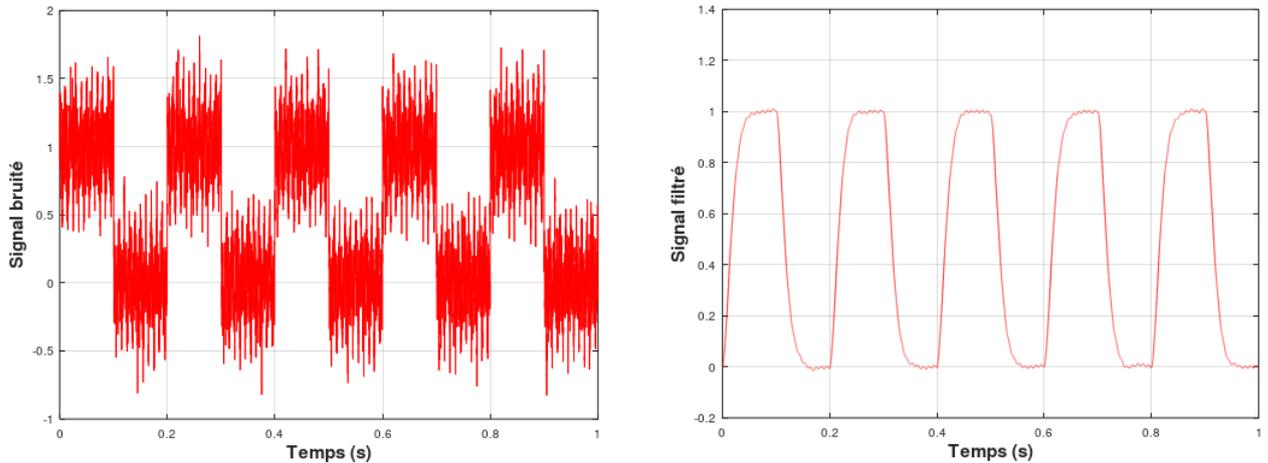


FIGURE 4.1 – Effet du filtre sur un signal bruité : signal bruité (à gauche) et filtré (à droite)

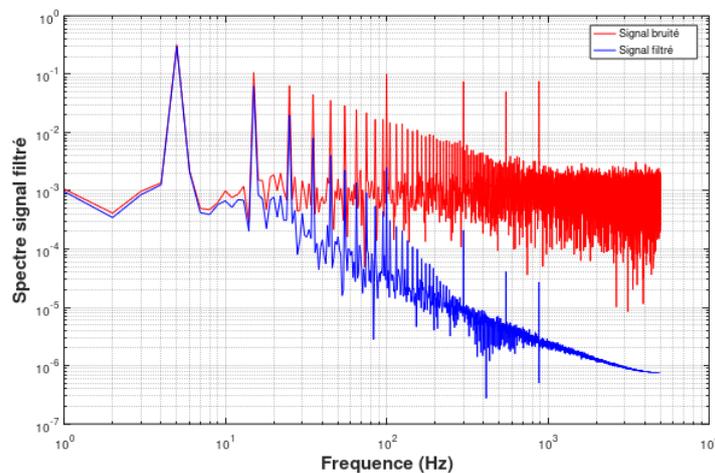


FIGURE 4.2 – Spectre du signal bruité et filtré

4.1 Définition d'un filtre

4.1.1 Définition

Un filtre est un système, généralement passif, présentant une certaine sélectivité dans le domaine des fréquences. Il est utilisé pour atténuer (ou au contraire laisser passer) le signal sur une ou plusieurs bandes de fréquences. Il atténue ainsi certaines des composantes fréquentielles du signal d'entrée et en laisse passer d'autres, d'où son appellation de filtre ! C'est bien cette opération sélective d'atténuation ou d'amplification des fréquences que modélise la multiplication de l'excitation par la fonction de transfert.

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (4.1)$$

Une manière pratique d'étudier un filtre est de l'analyser en régime harmonique, donc dans le domaine fréquentiel. Pour mettre en évidence l'effet du filtre, la fonction de transfert peut être écrite sous la forme module-argument :

$$H(f) = |H(f)| \exp(j \arg(H(f))) \quad (4.2)$$

Le module correspond au gain du filtre, c'est-à-dire le rapport entre les amplitudes de la réponse du filtre et de son excitation. Si le module est important, alors le signal d'entrée est faiblement atténué voire amplifié. Sinon, il est filtré. Si les signaux d'entrée et de sortie représentent le même type de grandeur (par exemple, une tension dans le cas de signaux électriques), le gain est sans unité.

L'argument correspond au déphasage apporté par le filtre. Celui-ci traduit un retard τ_p introduit par le filtre à la fréquence f , déterminé par l'équation 4.3. Il caractérise le retard apporté par le filtre sur chaque composante fréquentielle du signal et on parle de retard de phase. Un autre terme de retard courant pour caractériser les filtres est le retard de groupe τ_g . Par groupe, on entend un groupe de composantes fréquentielles, de fréquences proches, formant le signal qui va traverser le filtre. Chaque composante sera retardé individuellement selon l'argument de la fonction de transfert et la fréquence. Cependant, l'enveloppe du signal, résultante de l'ensemble des composantes fréquentielles présentes, sera affectée par le retard de groupe. Celui-ci est défini par 4.4. Il dépend de la dérivée fréquentielle de l'argument de la fonction de transfert.

$$\tau_p(f) = -\frac{\text{Arg}(H(f))}{2\pi df} \quad (4.3)$$

$$\tau_g(g) = -\frac{d(\text{Arg}(H(f)))}{2\pi df} \quad (4.4)$$

Filtre à phase linéaire

Considérons un cas simple : un signal formée de deux signaux cosinusoidaux, de fréquence f_1 et f_2 , traverse un filtre LTI caractérisé par une fonction de transfert $H(jf)$. Les retards introduits par le filtre aux fréquences f_1 et f_2 sont respectivement : $-\frac{\text{Arg}(H(f_1))}{f_1}$ et $-\frac{\text{Arg}(H(f_2))}{f_2}$. Les retards subis par ces deux composantes ne sont pas nécessairement identiques. Dans ce cas, la forme du signal sera affectée même si le module du filtre est constant. La déformation observée est appelée distorsion du signal. Selon le domaine d'application, ce n'est pas forcément acceptable (par exemple, dans le cas d'un signal audio HiFi). Si les deux composantes sont en phase à l'entrée du filtre, le délai $\Delta\tau$ entre elles à la sortie du filtre est donné par :

$$\Delta\tau = -\frac{\text{Arg}(H(f_1))}{f_1} + \frac{\text{Arg}(H(f_2))}{f_2}$$

Pour éviter toute distorsion du signal lors de la traversée du filtre, ce délai doit être nul. Une situation évidente se produit quand l'argument du filtre est constant en fonction de la fréquence (du moins, entre f_1 et f_2). Plus généralement, si la phase varie linéairement en fonction de la fréquence (l'évolution fréquentielle de l'argument est donnée par une fonction du type $\text{Arg}(H(f)) = K \cdot f$ où K est une constante réelle), alors le délai entre les différentes composantes fréquentielles du signal s'annule et il n'y a plus de distorsion. Autrement dit, le retard de groupe est constant en fonction de la fréquence. Un filtre qui présente une telle propriété est appelé filtre à phase linéaire.

4.1.2 Filtre à réponse impulsionnelle réelle

Considérons le cas particulier, mais pratique, où la réponse impulsionnelle est une fonction réelle : $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) \in \mathbb{R}$. Une réponse temporelle prenant des valeurs complexes n'aurait pas directement de sens physique ! On peut alors appliquer la propriété suivante de la Transformée de Fourier : la Transformée de Fourier d'une fonction réelle est une fonction en général complexe

mais admettant une symétrie conjuguée : $\forall f \in \mathbb{R}, H^*(f) = H(-f)$, c'est-à-dire dont le module est une fonction paire tandis que l'argument est une fonction impaire, comme le montre l'équation ci-dessous.

$$\forall f \in \mathbb{R}, |H(f)| = |H(-f)| \text{ et } \arg(H(f)) = -\arg(H(-f)) \quad (4.5)$$

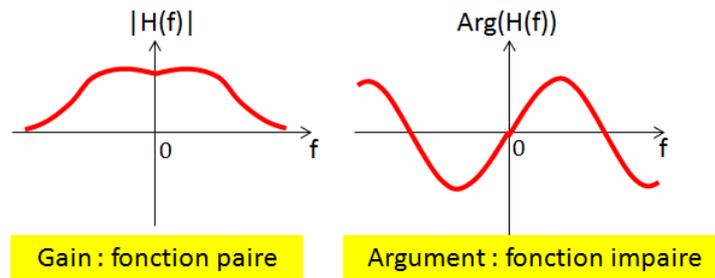


FIGURE 4.3 – Symétries du module et de l'argument d'un filtre réel

4.1.3 Fréquence négative

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la fréquence est une grandeur réelle pouvant être négative. En raison de propriétés de symétries introduites par la transformée de Fourier pour les fonctions réelles, les représentations que nous utiliserons dans ce chapitre ne font apparaître que les fréquences positives. Les fréquences négatives sont omises par convention parce qu'elles n'apportent pas d'informations supplémentaires : le gain est une fonction paire tandis que le déphasage est une fonction impaire.

La notion de basse ou de haute fréquence ne s'attache qu'à la valeur absolue de la fréquence considérée : seules les fréquences positives f appartenant à \mathbb{R}^+ ont un sens physique ; les fréquences négatives f appartenant à \mathbb{R}^- n'ont pas de signification physique directe, mais leur prise en compte assure une utilisation correcte de l'analyse harmonique comme outil d'étude des filtres.

Ainsi, la convention pratique veut que le tracé des caractéristiques des gains et déphasage des filtres (diagramme de Bode), la définition des fréquences de coupure et des bandes passantes soient uniquement donnés dans le domaine des fréquences positives. Ils existent aussi pour les fréquences négatives, mais sont obtenus facilement par symétrie.

4.2 Analyse harmonique

A partir de la connaissance du gain et du déphasage de la fonction de transfert, lorsque le filtre est attaqué par un signal (co)sinusoidal, il est très simple de déterminer l'expression de sa réponse. En considérant une notation complexe, la réponse temporelle du filtre en régime harmonique est donnée par :

$$x(t) = \text{Re}[X_0 \exp(j\Phi_x) \exp(j2\pi ft)] \Rightarrow y(t) = \text{Re}[X_0 |H(f)| \exp(j(\Phi_x + \arg(H(f)))) \exp(j2\pi ft)] \quad (4.6)$$

Celle-ci peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi ft + \Phi_x) \Rightarrow y(t) = X_0 |H(f)| \cos(2\pi ft + \Phi_x + \arg(H(f))) \quad (4.7)$$

4.3 Représentation - Diagramme de Bode

4.3.1 Diagramme de Bode

En régime harmonique, l'étude d'un filtre passe par une analyse de son gain et de son déphasage. Il faut donc chercher une représentation graphique adaptée à l'analyse du comportement fréquentiel du filtre. La méthode la plus courante est le tracé du diagramme de Bode. Il contient deux tracés graphiques décrivant :

- l'évolution du gain en fonction de la fréquence
- l'évolution du déphasage en fonction de la fréquence

Bien qu'il n'existe pas une forme de représentation unique du diagramme de Bode, certains usages sont récurrents et il convient de les expliquer. Pour des raisons pratiques, l'axe fréquentiel est généralement tracé en échelle logarithmique. En général, on s'intéresse au comportement fréquentiel sur une large gamme de fréquence, couvrant plusieurs décades. Un tracé avec une échelle linéaire offre une résolution constante, qui cache les détails dans les basses fréquences. Avec un tracé en échelle logarithmique, la résolution varie en fonction de la fréquence et s'adapte à chaque décade. Le même niveau de détail peut être apprécié en basse ou en haute fréquence. C'est ce qu'illustre la figure 4.4 : le filtre étudié est de type passe-bas, c'est-à-dire qu'il laisse passer les signaux basses fréquences. Le tracé est réalisé entre 100 Hz et 1 MHz. Avec l'échelle linéaire, le tracé ne permet pas d'évaluer précisément à partir de quelle fréquence le filtre commence à atténuer significativement le signal d'entrée. Avec l'échelle logarithmique, on peut mieux évaluer cette fréquence, appelée fréquence de coupure, qui se situe aux alentours de 1 kHz.

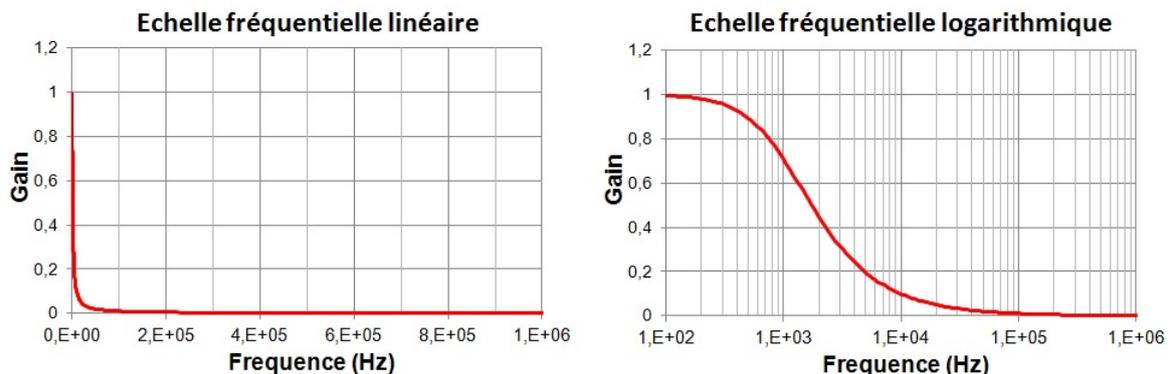


FIGURE 4.4 – Tracé du gain de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas : échelle fréquentielle linéaire (à gauche) et logarithmique (à droite)

Conseil pratique : comment tracer une échelle logarithmique ?

On définit tout d'abord le pas représentant une décade (par exemple 2 cm par décade). On considère que l'origine est placée en $f=1$ ($\log_{10}(1) = 0$). La position de toute valeur par rapport à cette origine sera donnée par $\text{pas} \times \log_{10}(\text{valeur})$. Ainsi, la valeur 10 (une décade de plus que 1) sera située à 2 cm à droite de l'origine, 100 (deux décades de plus) sera située à 4 cm à droite de l'origine, tandis que 0.1 (une décade de moins) sera située à 2 cm à gauche de l'origine. Par exemple, la valeur 50 sera située à $2 \times \log_{10}(50) = 3.4$ cm à droite de l'origine.

Une autre convention consiste à exprimer les gains en décibels (4.8), qui n'est rien d'autre qu'une représentation des valeurs sur une échelle logarithmique. De part leur sélectivité en fréquence, les gains des filtres vont présenter des valeurs très variables en fonction de la fréquence. Pour les mêmes raisons que la représentation des fréquences, une échelle logarithmique pour le gain permettra d'apprécier avec la même résolution les faibles et les fortes valeurs de gain. La

figure 4.5 l'illustre, en reprenant l'exemple du tracé du gain du filtre précédent. Le tracé du gain sur une échelle linéaire ne permet pas de le mesurer précisément lorsqu'il atteint de faibles valeurs. A contrario, lorsqu'il est exprimé en dB, la mesure des faibles valeurs devient plus précise, mettant en évidence les tendances particulières du gain. Par exemple, le gain de ce filtre décroît avec une pente de -20 dB par décade au-dessus de la fréquence de coupure, ce qui est typique d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(|H(f)|) \quad (4.8)$$

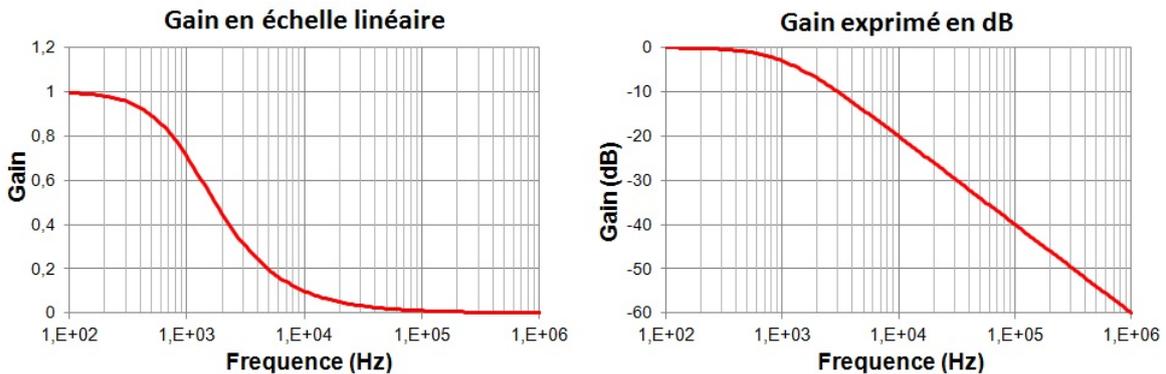
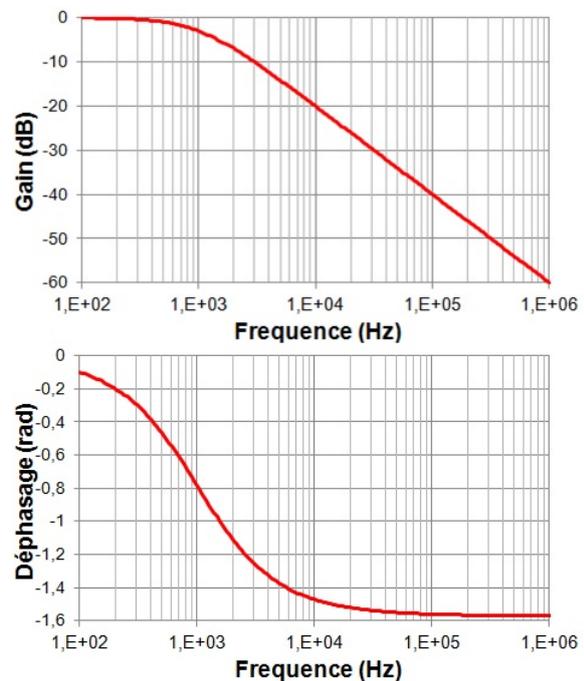


FIGURE 4.5 – Tracé du gain de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas : échelle linéaire (à gauche) et en décibel (à droite)

Il n'y a pas de convention particulière pour le déphasage, qui peut être exprimé en radians ou en degrés. La figure ci-contre présente le diagramme de Bode du filtre précédent, montrant les tracés de l'évolution fréquentielle de son gain et de son déphasage. Le diagramme de Bode indique un déphasage dont la valeur diminue entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$. Le déphasage étant négatif, le filtre introduit un retard.



Remarque : normalisation des fréquences :

Un filtre de nature donnée présentera toujours la même tendance fréquentielle. Seule la ou les fréquences de coupure changeront selon les propriétés du filtre. Pour disposer d'une représentation indépendante de la fréquence de coupure, il est courant de représenter l'axe des fréquences sous la forme d'une fréquence normalisée. Cette normalisation se fait par rapport à une fréquence de référence, généralement la fréquence coupure du filtre. Ainsi, le même gabarit peut être utilisé pour

plusieurs filtres présentant différentes fréquences de coupure. Si l'axe fréquentiel est exprimé en pulsation, la normalisation se fera de la même manière.

$$f_{norm} = \frac{f}{f_c} \quad (4.9)$$

$$\omega_{norm} = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (4.10)$$

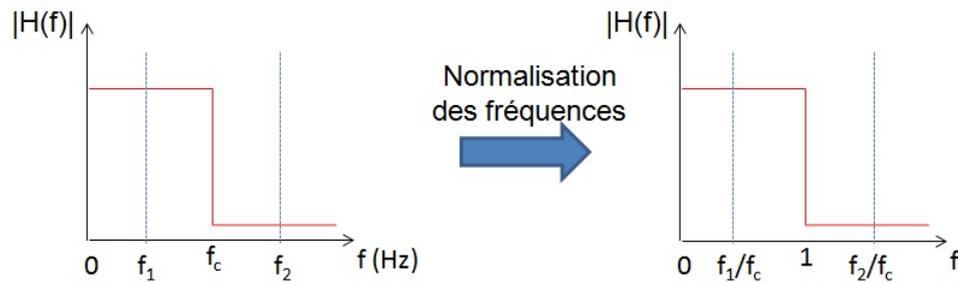


FIGURE 4.6 – Normalisation des fréquences

4.3.2 Tracé asymptotique du diagramme de Bode

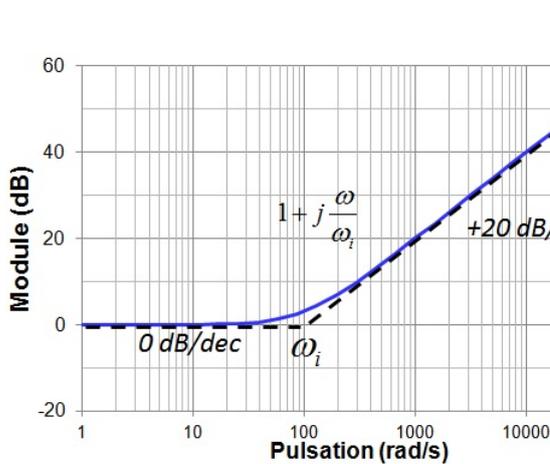
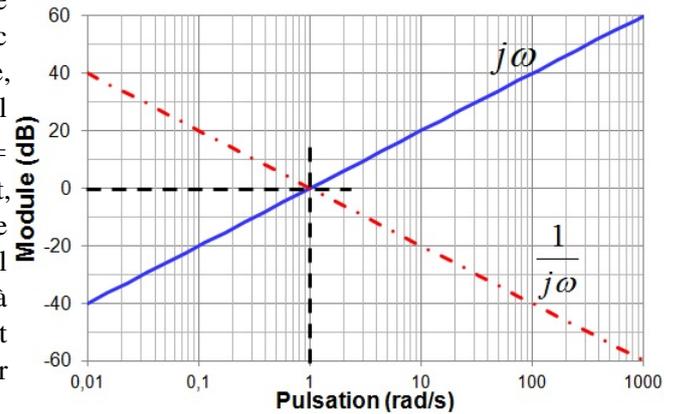
Les fonctions de transfert des filtre linéaires peuvent souvent être écrites sous la forme d'un rapport de deux polynômes, comme le montre l'équation 4.11. Comme nous allons le voir, cette forme particulière facilite le tracé graphique du module de la fonction de transfert, sous une forme appelée tracé asymptotique. Celui-ci permet de visualiser ou représenter sans calculs compliqués l'évolution du module, les pentes, les points d'inflexion (fréquences de coupure) ou l'ordre du filtre. Il s'agit d'un outil d'ingénierie couramment utilisé, soit dans la synthèse de filtre comme moyen de définir le gabarit d'un filtre, ou bien de son analyse à partir de l'expression de sa fonction de transfert.

$$H(\omega) = G \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j \frac{\omega}{\omega_i})}{\prod_{j=1}^n (1 + j \frac{\omega}{\omega_j})} \quad (4.11)$$

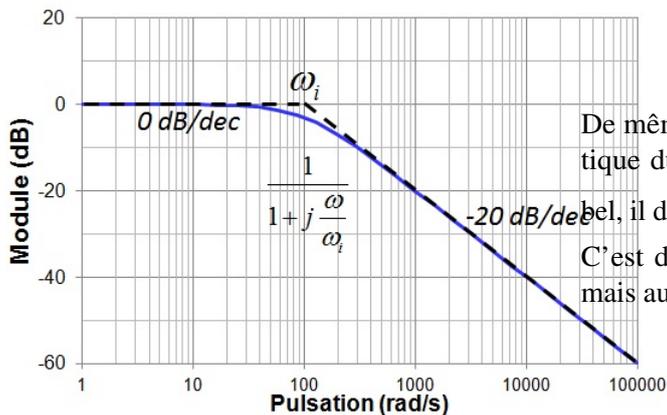
Le tracé asymptotique est une représentation simplifiée du module, même s'il peut s'étendre à celui de la phase. Il consiste à représenter le comportement asymptotique de chacun des termes des produits au numérateur et au dénominateur de l'équation 4.11, où G est une constante réelle, ω_i représente les zéros et ω_j les pôles de la fonction de transfert. La représentation se fait systématiquement sur un graphique aux échelles log-log, avec l'utilisation de décibels sur l'axe des ordonnées. De cette manière, les termes de l'équation 4.11 présenteront des décroissances linéaires en +/- 20 dB/dec. En outre, les produits et les divisions se transformeront en addition ou en soustraction, opérations plus simples (on rappelle que $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ et $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$).

Nous allons illustrer le tracé asymptotique du module et de la phase d'une fonction de transfert quelconque. Mais avant, nous allons réaliser ceux des termes de base de l'équation 4.11. Dans les différents exemples, nous allons considérer une pulsation de coupure $\omega_i = 100 \text{ rad/s}$. Commençons par le terme $j\omega$. C'est un cas particulier où la racine est nulle. Après passage en décibels, son module devient $20\log(\omega)$.

Dans un tracé log-log, comme celui présenté ci-contre, le module évolue linéairement avec une pente en 20 dB/décade. Le terme inverse, $\frac{1}{j\omega}$, est très proche. Le passage en décibel conduit à : $20\log(\frac{1}{j\omega}) = 20\log(1) - (20\log(\omega)) = -20\log(\omega)$. L'évolution se fait aussi linéairement, mais avec une croissance en -20 dB/dec. Dans ce cas, le tracé asymptotique est évident, puisqu'il consiste en une simple droite de pente égale à +/-20 dB/dec. Ces deux termes étant purement imaginaires, leur phase est de $+\frac{\pi}{2}$ pour le premier terme, $-\frac{\pi}{2}$ pour le second.



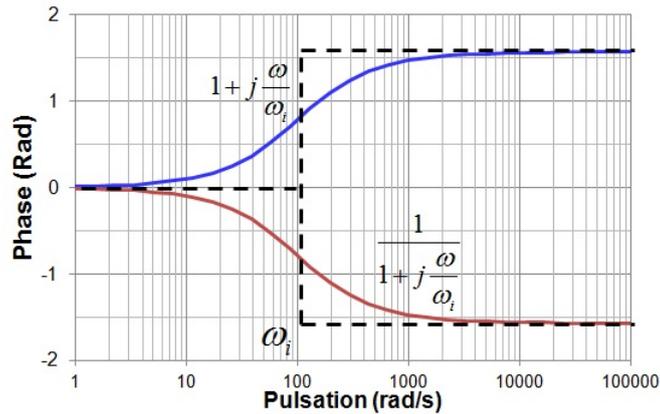
Considérons maintenant le terme $1 + j\frac{\omega}{\omega_i}$. Tant que la pulsation est inférieure à ω_i , le module reste constant, proche de 1 (soit 0 dB). Par contre, au-delà de ω_i , le module augmente linéairement avec la fréquence, en +20 dB/dec. Entre ces deux comportements asymptotiques, l'évolution fréquentielle est plus compliquée à tracer précisément. Néanmoins, en ramenant le tracé à deux droites de pente 0 et +20 dB/dec se coupant en ω_i , on obtient une représentation simplifiée mais montrant précisément la fréquence de coupure et les tendances asymptotiques de la fonction de transfert en dessous et au-dessus de la fréquence de coupure.



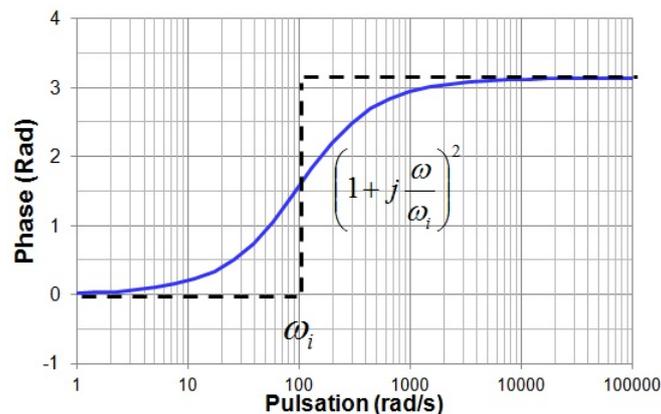
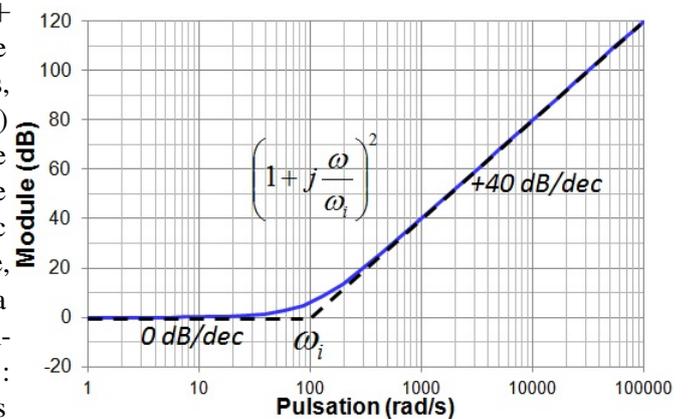
De même, on peut représenter le tracé asymptotique du terme $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_i}}$. Lors du passage en décibel, il devient : $20\log(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_i}}) = -20\log(1 + j\frac{\omega}{\omega_i})$. C'est donc le même terme que précédemment, mais au signe près.

La phase de ces deux termes est égale à $+/- \arctan(\frac{\omega}{\omega_i})$. On peut aussi en déduire deux comportements asymptotiques. Tant que la pulsation est largement inférieure à ω_i , c'est la partie réelle qui domine donc la phase est proche de 0. Dès que la pulsation est bien plus grande que ω_i , c'est la partie imaginaire et la phase tend vers $+/- \frac{\pi}{2}$. C'est ce qu'illustre la figure ci-dessous. On remarque le passage par $+/- \frac{\pi}{4}$ au passage par ω_i .

La multiplication des termes précédents par une constante réelle G , dans un diagramme de Bode en échelle log-log, introduit un simple décalage vertical du tracé égal à $20\log(G)$ sans introduire de déphasage supplémentaire.



Il est possible qu'une racine soit multiple. Si elle apparaît k fois, on verra un terme du type $(1 + j\frac{\omega}{\omega_i})^k$ dans la fonction de transfert. Le passage en décibel de ce terme donne : $20\log((1 + j\frac{\omega}{\omega_i})^k) = 20k \cdot \log(1 + j\frac{\omega}{\omega_i})$. On retrouve donc le même genre de tracé asymptotique qu'au-dessus, mais le rythme de croissance (ou de décroissance) du module au-dessus de la fréquence de coupure est de $+20k$ dB/dec. Dans le cas d'une racine double, la pente sera de 40 dB/dec; 60 dB/dec pour une racine triple ... Dans l'exemple ci-contre, on considère une racine double. Ci-dessous, la phase de ce terme est tracé. Comme précédemment, on observe deux tendances asymptotiques : une phase tendant vers 0 en-dessous de ω_i , puis une phase tendant vers π au-dessus de ω_i . Dans le cas où la racine apparaît k fois, le déphasage tendra vers $k \cdot \frac{\pi}{2}$.



Nous n'avons considéré que des cas particuliers de fonctions de transfert relativement simple. Comment faire lorsque l'expression de la fonction de transfert présente plusieurs termes au numérateur et au dénominateur. Là encore, le tracé dans un graphe log-log simplifie grandement les choses. Pour le tracé du module, après un passage en décibel, l'équation 4.11 peut s'écrire sous la forme suivante. On retrouve les termes élémentaires vus précédemment. Le tracé asymptotique de cette

fonction de transfert ne sera que l'addition des tracés asymptotiques individuels de chaque terme élémentaire. Si sur une plage de fréquence, deux termes ont une pente donnée, le comportement asymptotique résultant sera la somme de ces pentes.

$$20\log(H(\omega)) = 20\log\left(G \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\frac{\omega}{\omega_i})}{\prod_{j=1}^n (1 + j\frac{\omega}{\omega_j})}\right) = 20\log(G) + \sum_{i=1}^m 20\log(1 + j\frac{\omega}{\omega_i}) - \sum_{j=1}^n 20\log(1 + j\frac{\omega}{\omega_j}) \quad (4.12)$$

De la même manière, la phase de la fonction de transfert sera obtenue en additionnant les déphasages introduits par chacun des termes élémentaires, comme le montre l'équation ci-dessous.

$$\arctan(H(\omega)) = \sum_{i=1}^m \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) - \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right) \quad (4.13)$$

Nous allons illustrer comment réaliser cette opération à travers un exemple. Considérons la fonction de transfert suivante :

$$H(\omega) = 2 \frac{j\omega(1 + j\frac{\omega}{1000})}{1 + j\frac{\omega}{10}}$$

La fonction de transfert est déjà mise sous une forme équivalente à l'équation 4.11. On identifie trois termes :

1. $2j\omega$
2. $1 + j\frac{\omega}{1000} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$
3. $1 + j\frac{\omega}{10} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$

On trace individuellement le comportement asymptotique de chaque terme. On commence par le tracé du module. Sur la figure 4.7, le comportement asymptotique des trois termes est représenté. On repère les deux fréquences de transition ω_1 et ω_2 . Sur les trois plages de fréquence ainsi délimitées, on additionne les morceaux des tracés asymptotiques. Entre ω_1 et ω_2 , l'augmentation en 20 dB/dec du module liée au terme 1 est compensée par la décroissance due au terme 2. Le coefficient multiplicateur 2 conduit à un décalage de +6 dB du module.

De la même manière, on réalise le tracé asymptotique de la phase. Le terme 1 introduit un déphasage constant de $\frac{\pi}{2}$. Le déphasage du terme 2 tend vers $\frac{\pi}{2}$ à l'infini, tandis que celui du terme 3 tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Le résultat de la construction est présenté sur la figure 4.8.

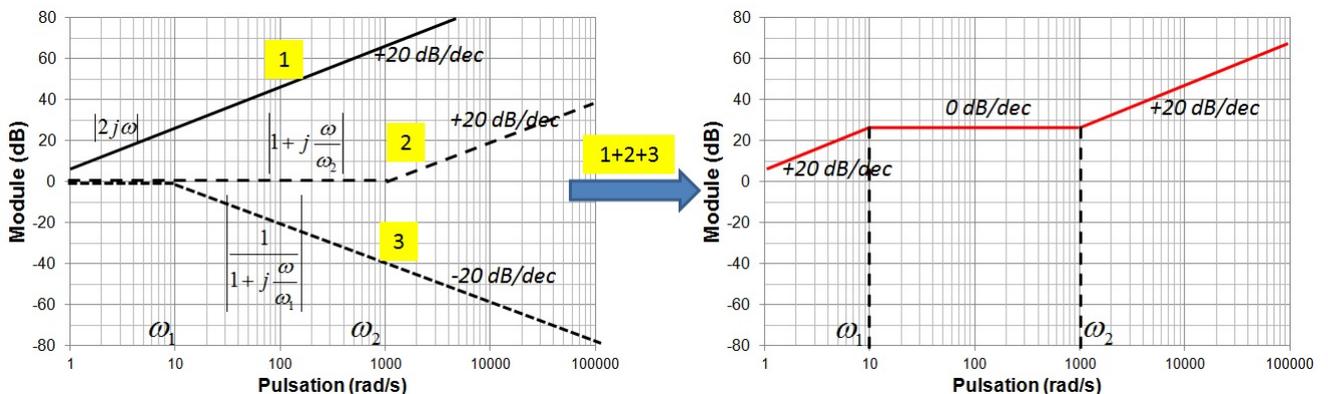


FIGURE 4.7 – Construction du tracé asymptotique du module de la fonction de transfert exemple

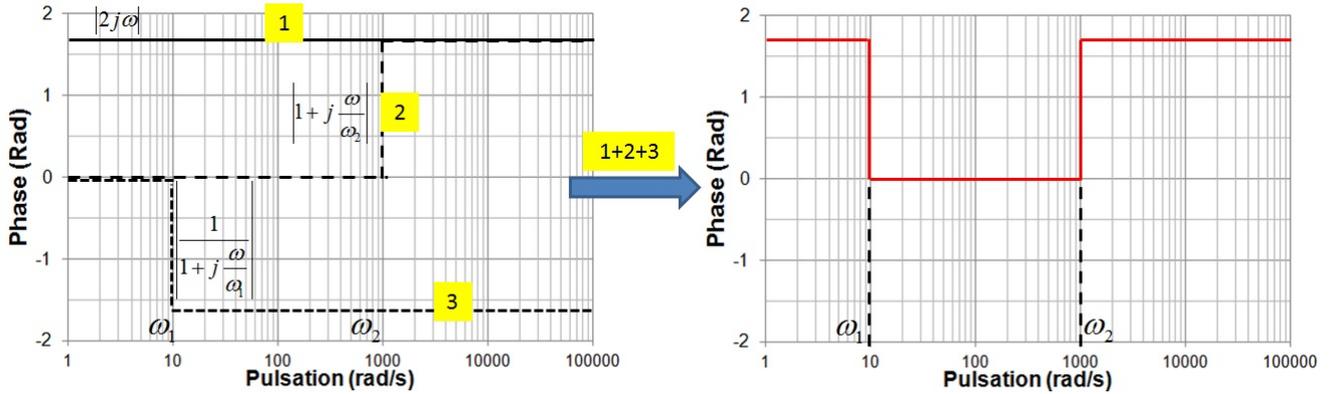


FIGURE 4.8 – Construction du tracé asymptotique de la phase de la fonction de transfert exemple

A titre de comparaison, le module et la phase de cette fonction de transfert sont tracés sur un diagramme de Bode. On vérifie que les tracés asymptotiques reflètent correctement les tendances du module et de la phase de la fonction de transfert.

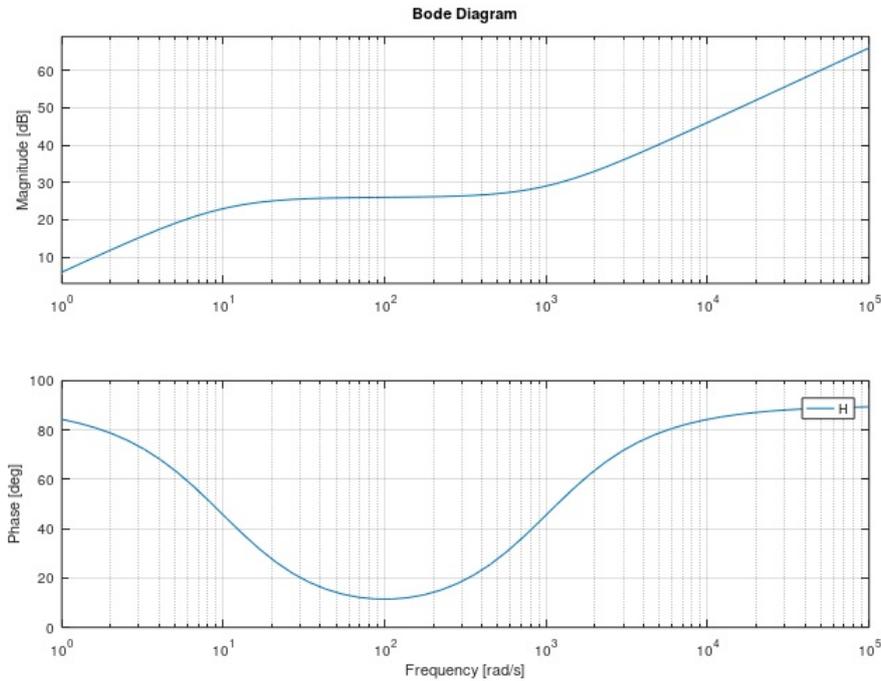


FIGURE 4.9 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert exemple

4.4 Les principales caractéristiques d'un filtre

Lorsqu'on analyse un filtre ou lorsqu'on cherche à le dimensionner, plusieurs caractéristiques sont étudiées. Celles-ci définissent le comportement fréquentiel global. Nous allons les définir ici.

4.4.1 Gain

Le gain est le module de la fonction de transfert et varie donc avec la fréquence. Néanmoins, on peut spécifier une valeur unique, qui correspond généralement à la valeur maximale du gain.

4.4.2 Fréquence(s) de coupure

Elles correspondent aux fréquences auxquelles le gain présente un changement de tendance. Dans la pratique, on considère un critère d'atténuation du gain de -3 dB (soit une division du gain par $\sqrt{2}$). On appelle fréquence de coupure (en toute rigueur fréquence de coupure à -3dB) d'un filtre toute fréquence positive ou nulle f_c vérifiant :

$$|H(f_c)| = \frac{\max_{\forall f \in \mathbb{R}^+} (|H(f)|)}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(f_c) = \max_{\forall f \in \mathbb{R}^+} (G_{dB}(f)) - 3 \quad (4.14)$$

Tout filtre admet alors une ou plusieurs fréquences de coupures : un filtre de gabarit passe-bas ou de gabarit passe-haut n'a qu'une fréquence de coupure, tandis qu'un filtre passe-bande ou coupe-bande classique a deux fréquences de coupure.

4.4.3 Bande passante

La sélectivité du filtre est donnée par sa bande passante. Il s'agit de la plage de fréquence sur laquelle l'atténuation apportée par le filtre est faible. Elle est délimitée par deux fréquences, définies selon un critère d'atténuation par rapport au gain maximal obtenu dans la bande passante. Un critère courant consiste à considérer une atténuation de -3 dB. La bande passante est donc la bande de fréquence où le gain reste compris entre sa valeur maximale et sa valeur maximale atténuée de 3 dB. On définit la bande passante d'un filtre comme l'ensemble des fréquences f de \mathbb{R}^+ pour lesquelles le module de la fonction de transfert demeure au moins égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fois sa valeur maximale. La bande passante spécifie donc le domaine de fréquences à l'intérieur duquel le gain du filtre demeure plus ou moins constant, ou du moins ne chute pas de plus de 3 dB. Elle donne ainsi la plage de fréquences que le filtre va laisser passer, d'où son nom de bande passante !

La bande passante d'un filtre est constituée d'un ou plusieurs intervalles de \mathbb{R}^+ , les bornes de ces intervalles étant données par les fréquences de coupure du filtre. Par exemple, la bande passante d'un filtre passe-bas est de la forme $[0; f_c]$ où f_c est l'unique fréquence de coupure, tandis que la bande passante d'un filtre passe-haut est de la forme $[f_c; +\infty]$; la bande passante d'un filtre passe-bande classique (i.e. avec une seule bande passante) est de la forme $[f_{c1}; f_{c2}]$ où f_{c1} et f_{c2} sont les deux fréquences de coupure, tandis que la bande passante d'un filtre coupe-bande classique (i.e. avec une seule bande coupée) est de la forme $[0; f_{c1}] + [f_{c2}; +\infty]$.

4.4.4 Ordre du filtre

L'ordre du filtre est lié au nombre de pôles de sa fonction de transfert. Il conditionne la pente de la variation du gain en dehors de la bande passante. Si l'ordre du filtre est égal à n , la pente évolue en $+/- 20 \cdot n \text{ dB/dec}$.

4.4.5 Fréquences de résonance et d'antirésonance

Lorsque les filtres présentent des racines complexes, elles sont généralement doubles et conjuguées. Prenons l'exemple d'un filtre présentant deux pôles complexes et conjugués p_0 et p_0^* , où $p_0 = \alpha + j\omega_0$.

$$H(p) = \frac{1}{(p + p_0)(p + p_0)^*} = \frac{1}{(p + \alpha)^2 + (\omega_0)^2}$$

Supposons que la partie réelle α des racines est faible et plaçons nous en régime harmonique. La fonction de transfert est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + \alpha)^2 + (\omega_0)^2}$$

Si on excite le filtre à une pulsation proche de ω_0 , alors le dénominateur tend vers 0, faisant croître fortement le module de la fonction de transfert autour de ω_0 . On assiste à un phénomène de résonance. La fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ est appelée fréquence de résonance. Si on excite un filtre par un signal (co)sinusoïdal à cette fréquence, le signal de sortie sera affectée par une forte oscillation.

Inversement, si la fonction de transfert présente deux zéros complexes et conjugués, le module tendra vers 0 autour de ω_0 . On parlera de phénomène d'antirésonance, autour d'une fréquence dite d'antirésonance. Un filtre aura tendance à éliminer efficacement un signal (co)sinusoïdal à cette fréquence.

4.5 Les différents types de filtres

On classe les filtres en quatre types selon leur sélectivité fréquentielle :

- un filtre passe-bas laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences
- un filtre passe-haut laisse passer les hautes fréquences et atténue les basses fréquences
- un filtre passe-bande ne laisse passer que les fréquences contenues dans un intervalle donné
- un filtre coupe-bande n'atténue que les fréquences contenues dans un intervalle donné

Dans cette partie, nous allons rapidement passer en revue les expressions et les caractéristiques de ces différents filtres, pour les ordres 1 et 2. Nous tracerons aussi leur diagramme de Bode.

4.5.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

L'expression général de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est donnée par l'équation 4.15, où f_c est la fréquence de coupure. Au-dessus de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation augmentant en 20 dB/dec. A la fréquence de coupure, le gain est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où une atténuation de 3 dB. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 4.10.

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}} \quad (4.15)$$

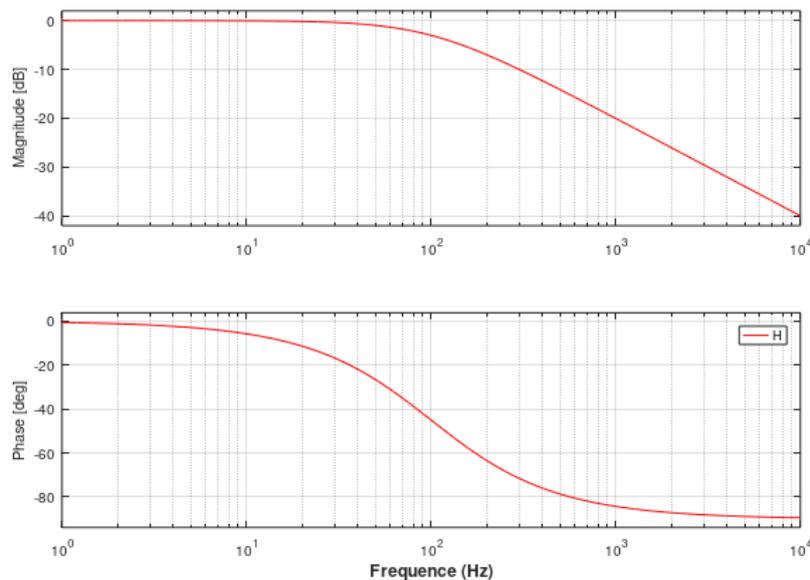


FIGURE 4.10 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 1 ($f_c = 100\text{Hz}$)

4.5.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 1 est donnée par l'équation 4.16, où f_c est la fréquence de coupure. En dessous de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation diminuant en 20 dB/dec. A la fréquence de coupure, le gain est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où une atténuation de 3 dB. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 4.11.

$$H(f) = \frac{j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (4.16)$$

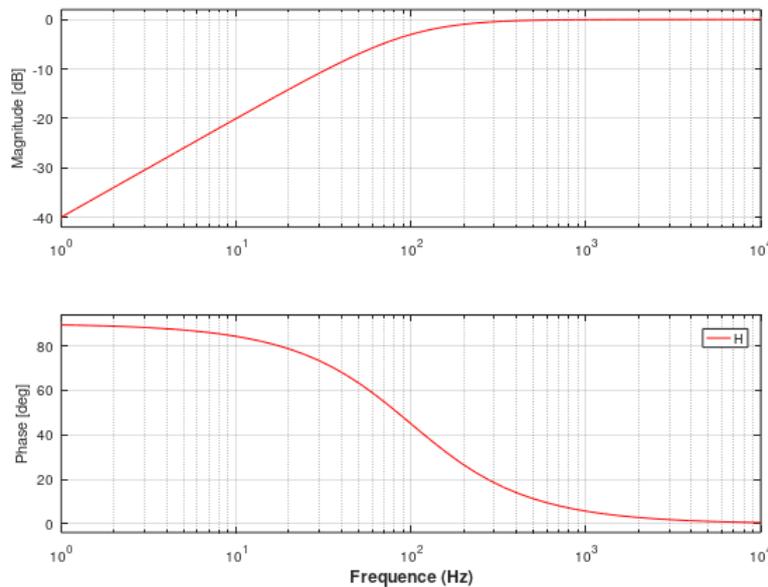


FIGURE 4.11 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 1 ($f_c = 100Hz$)

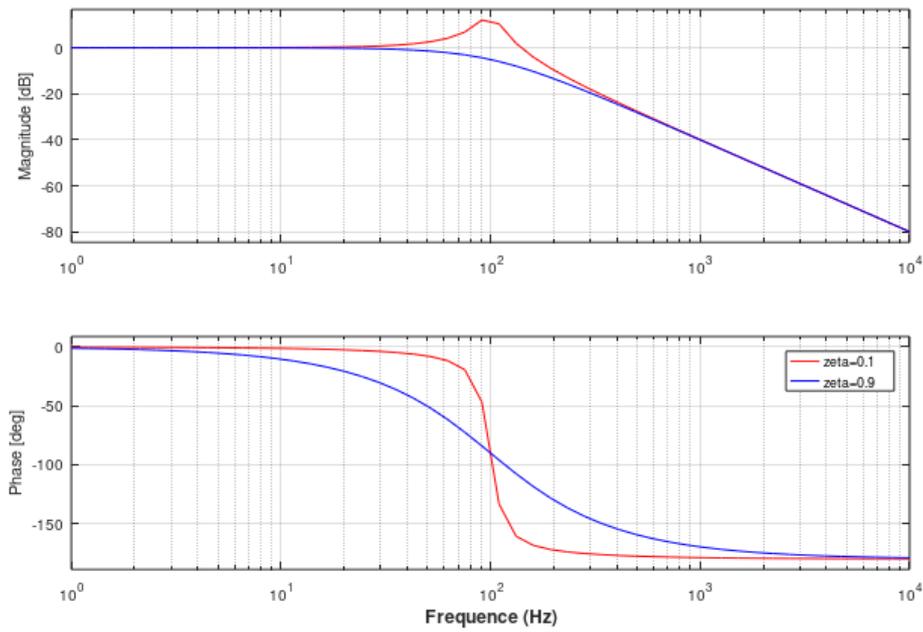
4.5.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 est donnée par l'équation 4.17, où f_c est la fréquence de coupure et ζ le coefficient d'amortissement. Au-dessus de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation augmentant en 40 dB/dec. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, on observe un accroissement du gain autour de la fréquence de coupure. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 4.10 pour deux valeurs du coefficient d'amortissement.

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2\zeta j \frac{f}{f_c} + (j \frac{f}{f_c})^2} \quad (4.17)$$

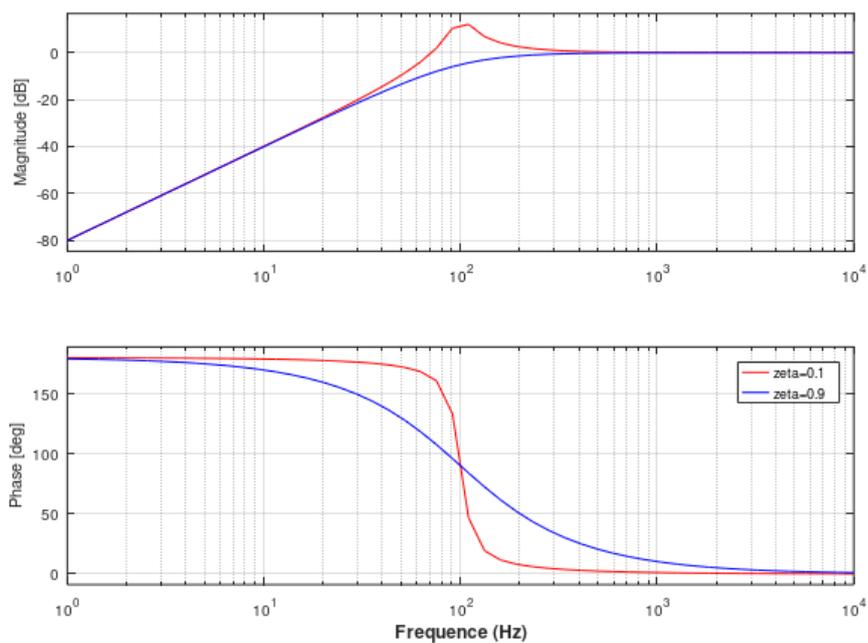
4.5.4 Filtre passe-haut d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 2 est donnée par l'équation 4.18, où f_c est la fréquence de coupure et ζ le coefficient d'amortissement. En dessous de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation diminuant en 40 dB/dec. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, on observe un accroissement du gain autour de la fréquence de

FIGURE 4.12 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 2 ($f_c = 100\text{Hz}$)

coupe. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 4.13 pour deux valeurs du coefficient d'amortissement.

$$H(f) = \frac{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}{1 + 2\zeta j\frac{f}{f_c} + \left(j\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad (4.18)$$

FIGURE 4.13 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 2 ($f_c = 100\text{Hz}$)

4.5.5 Filtre passe-bande d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est donnée par l'équation 4.19, où f_c est la fréquence de résonance ou fréquence centrale et ζ le coefficient d'amortissement. Il n'existe pas de filtre passe-bande d'ordre 1. Le filtre atténue toutes les fréquences de part et d'autre de la fréquence de résonance, avec une pente en 40 dB/dec. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, le gain est plus ou moins important dans la bande passante. Cependant, plus l'amortissement est élevé, plus la bande passante s'élargit. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 4.14 pour deux valeurs du coefficient d'amortissement.

$$H(f) = \frac{(j\frac{f}{f_c})^2}{1 + 2\zeta j\frac{f}{f_c} + (j\frac{f}{f_c})^2} \quad (4.19)$$

On appelle $Q = \frac{1}{2\zeta}$ le facteur de qualité. La bande passante de ce filtre est donnée par $\Delta f = \frac{f_c}{Q}$.

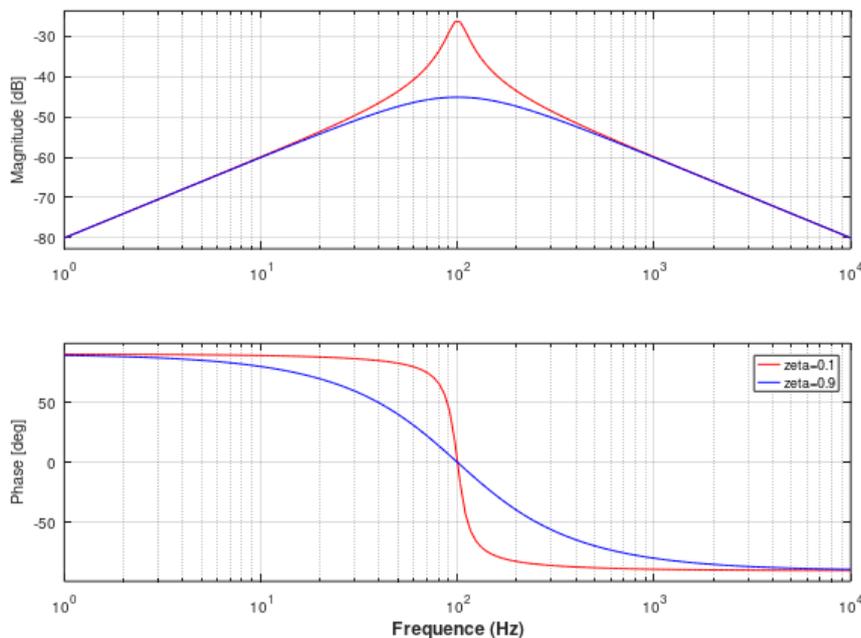
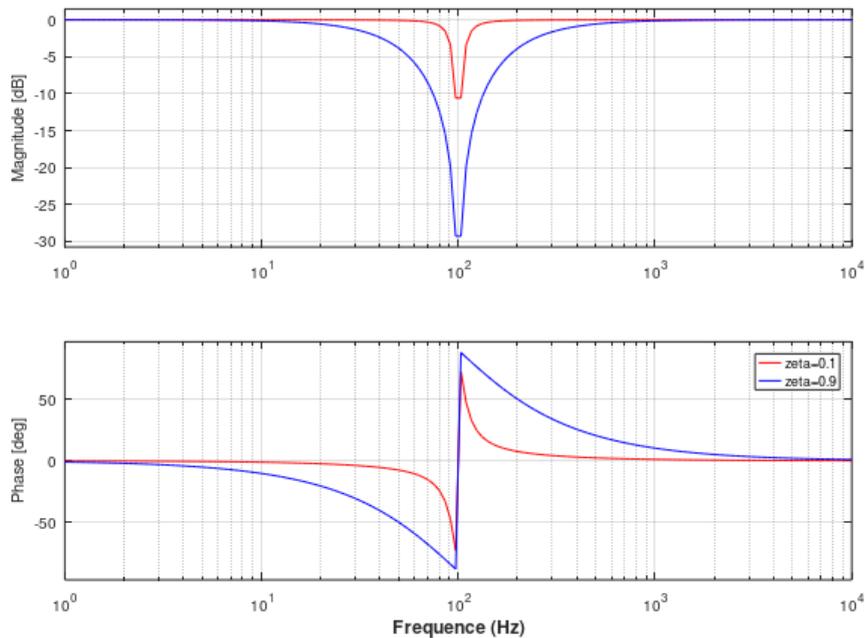


FIGURE 4.14 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande d'ordre 2 ($f_c = 100\text{Hz}$)

4.5.6 Filtre coupe-bande d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande d'ordre 2 est donnée par l'équation 4.20, où f_c est la fréquence d'antirésonance ou fréquence centrale et ζ le coefficient d'amortissement. Il n'existe pas de filtre coupe-bande d'ordre 1. Le filtre laisse passer toutes les fréquences de part et d'autre de la fréquence centrale. La capacité du filtre à couper une bande de fréquence est liée au coefficient d'amortissement.

$$H(jf) = \frac{1 + (j\frac{f}{f_c})^2}{1 + 2\zeta j\frac{f}{f_c} + (j\frac{f}{f_c})^2} \quad (4.20)$$

FIGURE 4.15 – Diagramme de Bode d'un filtre coupe-bande d'ordre 2 ($f_c = 100\text{Hz}$)

4.5.7 Mise en cascade filtre

Pour augmenter la sélectivité des filtres, il est nécessaire d'accroître leur ordre. On se rend compte qu'on doit pouvoir créer des filtres d'ordre élevé à partir des filtres précédents en les chainant. Supposons que l'on mette en cascade N filtres comme le montre la figure 4.16. En supposant que le chainage de ces filtres n'influe pas sur leurs caractéristiques, les signaux de sortie et d'entrée sont reliés entre eux par l'équation 4.21.

$$Y(f) = H_N(f)Y_{N-1}(f) = H_N(f)H_{N-1}(f)Y_{N-2}(f) = H_N(f)H_{N-1}(f)\dots H_1(f)X(f)$$

$$Y(f) = X(f) \prod_{i=1}^N H_i(f) \quad (4.21)$$

La condition précédente doit être vérifiée pour utiliser la relation 4.21. Lorsqu'on réalise un filtre électronique, des conditions d'adaptation d'impédance sont requises pour garantir que le filtre en aval ne modifie pas la tension en sortie du filtre placée en amont.

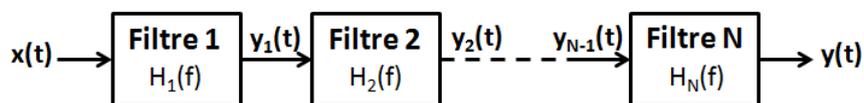


FIGURE 4.16 – Mise en cascade de filtre

4.6 Exercices

Exercice 1

Soit les fonctions de transfert suivantes (en fonction de la fréquence). Esquissez le diagramme de Bode (asymptotique).

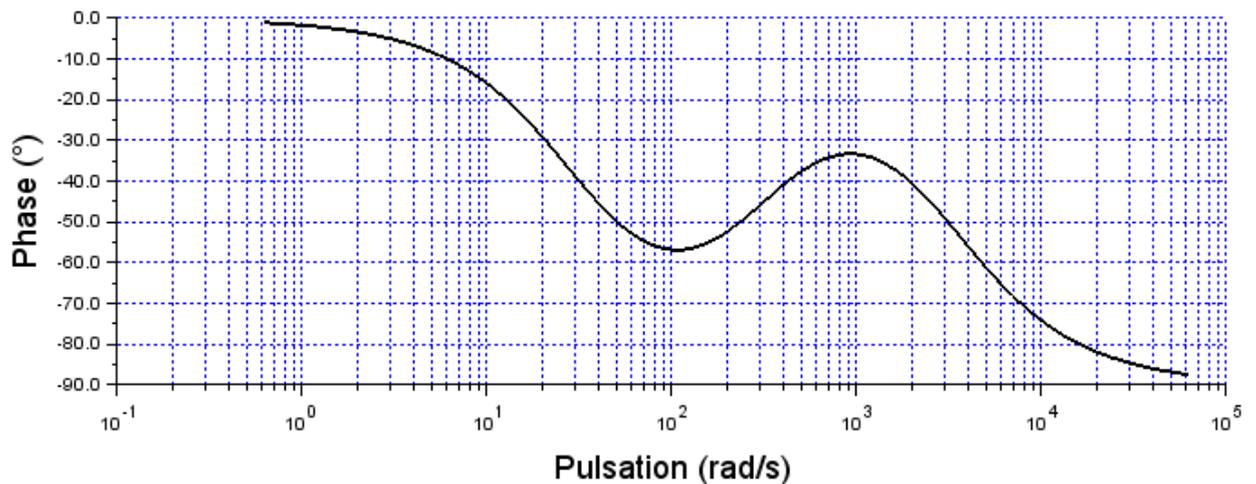
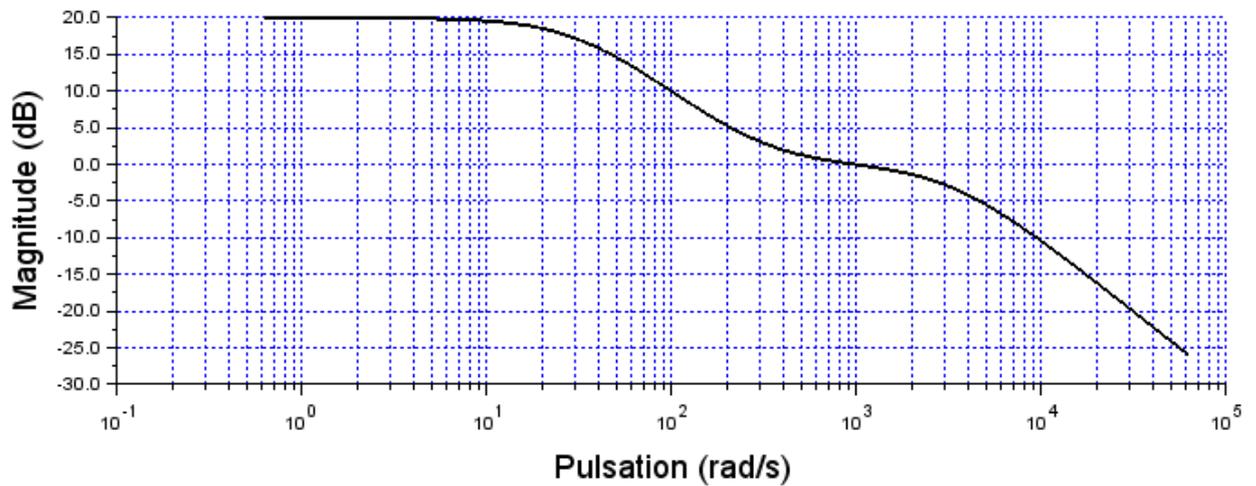
$$a. G(\omega) = \frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{628})(1+j\frac{\omega}{6280})(1+j\frac{\omega}{31400})}$$

$$b. H(p) = \frac{p^3+4p^2+4p}{p^2+60p+800}$$

$$c. Z(p) = \frac{p+10}{p(p+100)}$$

Exercice 2

On considère le filtre linéaire dont la fonction de transfert est tracée dans le diagramme de Bode ci-dessous. On se place en régime permanent. Donnez l'expression de la réponse $y(t)$ du filtre lorsqu'il est excité par les signaux suivants :



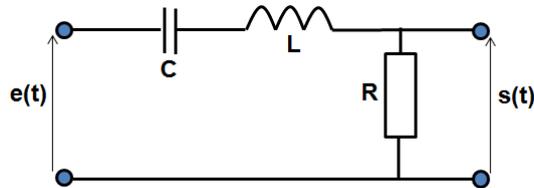
$$a. x(t) = 2.\cos(20\pi t)$$

$$b. x(t) = 2.\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4})$$

$$c. x(t) = 2.\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) + \cos(200\pi t + \frac{\pi}{2})$$

Exercice 3 - Circuit bouchon

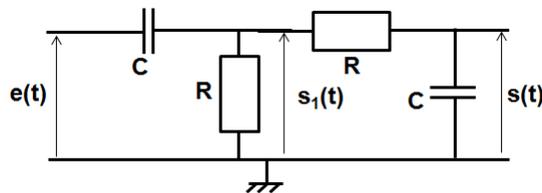
On considère le filtre décrit ci-dessous.



1. Etablir la fonction de transfert $H(\omega)$ de ce filtre. On la mettra sous la forme : $H(\omega) = \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$. Précisez la signification des termes α et ω_0 .
2. Tracez l'évolution de la fonction de transfert de ce filtre en fonction de la fréquence. Précisez l'amplitude maximale et les fréquences caractéristiques. Quelle est la nature du filtre ? Son ordre ?
3. Déterminez la bande passante à 3 dB de ce filtre.
4. Déterminez le facteur de qualité de ce filtre.
5. On fixe $L = 100\mu H$. On souhaite réaliser un filtre centré sur 200 kHz avec une bande passante de 10 kHz. Proposez des valeurs pour R et C.

Exercice 4

On considère le filtre passif ci-dessous. On utilisera les valeurs suivantes : $R = 1\text{ k}\Omega$ et $C = 100\text{ nF}$.



1. Déterminez l'expression de l'impédance formée par le circuit en aval du premier condensateur.
2. En déduire la relation entre les tensions e et s_1 . En déduire la fonction de transfert du circuit.
3. Quels sont les pôles et les zéros du filtre.
4. Pour les valeurs de R et de C, tracez le diagramme asymptotique de Bode. Précisez les fréquences de coupure du filtre, ainsi que la nature du filtre.

Exercice 5

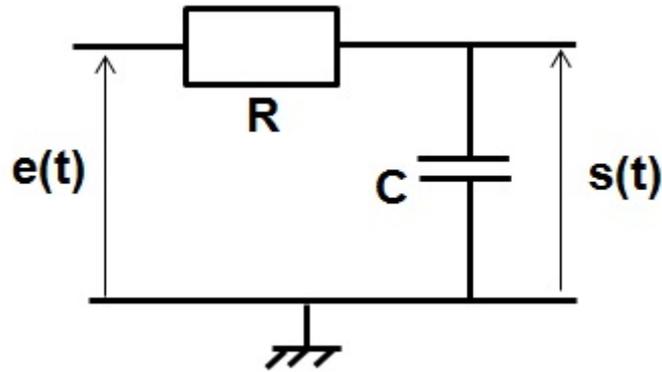
On dispose d'un filtre dont la fonction de transfert est donnée par $H(p) = \frac{1}{(p+2)^2}$.

1. Tracez la réponse fréquentielle du filtre dans le diagramme de Bode. Quelle est la nature du filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ?

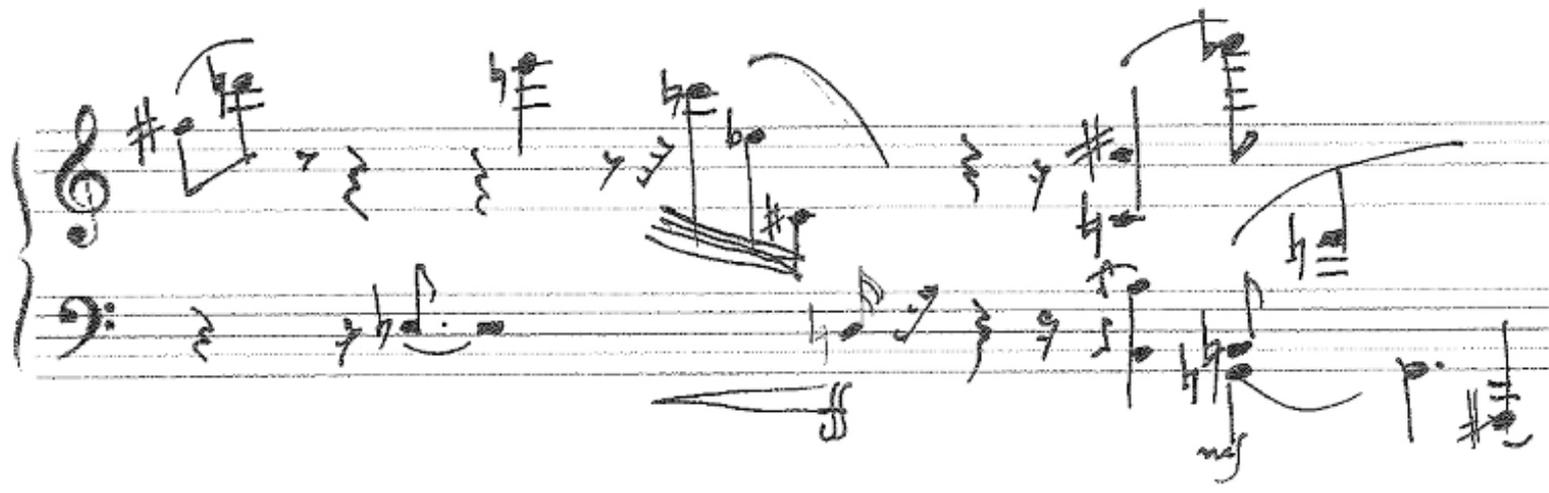
2. Calculez sa réponse impulsionnelle.
3. Calculez sa réponse indicielle.

Exercice 6 - Mise en cascade de filtres

On considère le filtre RC ci-dessous.



1. Calculez la fonction de transfert de ce filtre $H(f)$.
2. Précisez sa nature, sa fréquence de coupure, son ordre.
3. On cascade deux filtres de ce type. Calculez sa fonction de transfert $H_2(f)$.
4. Vérifie t-on $H_2(f) = H(f)^2$? Pourquoi ?



5. Séries de Fourier - Analyse fréquentielle des signaux

Ce chapitre, ainsi que le suivant, s'intéresse à un outil fondamental de l'analyse des signaux : l'analyse fréquentielle ou spectrale. Elle vise à étudier un signal (temporel par exemple) dans un domaine dit dual : le domaine fréquentiel. En d'autres termes, cette analyse suppose que le signal peut être décomposé en une somme de fonctions périodiques, en l'occurrence (co)sinusoidales. L'analyse fréquentielle consiste à analyser l'évolution de l'amplitude et la phase de ces termes en fonction de leur fréquence. Cette décomposition offre un autre "éclairage" du signal permettant de détecter des caractéristiques qui passent inaperçues dans le domaine temporel. La base de cette décomposition est appelée développement en série de Fourier. Cependant, il ne s'applique qu'aux fonctions périodiques. Dans le chapitre suivant, nous verrons que le développement en série de Fourier peut être modifié pour s'étendre à toutes les autres fonctions : on parlera alors de transformée de Fourier. Le but de ces deux chapitres est de présenter les fondements théoriques de ces outils, leurs propriétés ainsi que leur mise en œuvre. L'analyse fréquentielle s'applique à toutes les fonctions, tous les signaux, réels ou complexes. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux signaux à valeurs réelles formant la majorité des cas d'étude en pratique.

5.1 Fonctions périodiques

On appelle une fonction périodique, de période T_0 , se répète toutes les T_0 secondes. Cette période de répétition est appelée période fondamentale. L'inverse F_0 , donnée par 5.1, est appelée la fréquence fondamentale.

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \quad (5.1)$$

Une fonction périodique $f(t)$ vérifie donc la propriété suivante :

$$f(t) = f(t + kT_0), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (5.2)$$

Cette fonction est nécessairement non bornée dans le temps. Seule la connaissance de la fonction pendant un intervalle est donc suffisant. Dans la suite, on se bornera à l'intervalle de temps $[0; T_0]$, voire $[-\frac{T_0}{2}; +\frac{T_0}{2}]$.

Parmi les fonctions périodiques, une famille particulière va nous intéresser : la famille des fonctions trigonométriques, intégrant les fonctions cosinusoidales et sinusoidales. Elles ont une propriété intéressante vis-à-vis de l'intégration. Dès qu'on intègre une fonction (co)sinusoïdale sur un intervalle de temps égal à la période fondamentale, alors celle-ci s'annule. De plus, si on considère des fonctions (co)sinusoïdales de fréquences multiples de la fréquence fondamentale et si on les intègre sur une période fondamentale, le résultat est encore une fois nul.

$$\int_{T_0} \cos(2\pi k F_0 t) dt = \int_{T_0} \sin(2\pi k F_0 t) dt = 0 \quad (5.3)$$

5.2 Développement d'une fonction périodique sous la forme d'une série

5.2.1 Principe

On peut montrer que toute fonction périodique $x(t)$, de période T_0 peut être exprimée sous la forme d'une somme infinie ou série de termes $\Phi(k)$, comme le montre l'équation 5.4, à condition que :

- ces termes forment une base de fonctions orthogonales
- elles sont des fonctions périodiques

$$x(t) = C_0 \Phi_0(t) + C_1 \Phi_1(t) + C_2 \Phi_2(t) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \Phi_k(t) \quad (5.4)$$

Si les termes Φ_k peuvent être déterminés, on dit alors que la fonction peut être décomposée sous la forme d'une série de fonctions Φ_k , liés avec $x(t)$ par une série de coefficients C_k qui sont les seuls inconnus à déterminer. k est appelé l'ordre de la fonction Φ_k . L'orthogonalité est liée à l'opération de produit scalaire, définie par l'équation 5.5, où T est la période commune à tous les termes Φ_k . Si les fonctions sont complexes, le produit scalaire est donné par 5.6, où le conjugué d'une des deux fonctions est requis.

$$\int_T \Phi_m(t) \Phi_n(t) dt \quad (5.5)$$

$$\int_T \Phi_m(t) \Phi_n^*(t) dt \quad (5.6)$$

Deux termes sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Ainsi, la base de fonctions Φ_k forme une base orthogonale si les deux propriétés suivantes sont rencontrées :

$$\int_T \Phi_m(t) \Phi_n(t) dt = \begin{cases} K & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.7)$$

Cette propriété se comprend aisément car elle permet de définir une relation permettant de calculer les coefficients C_k . En effet, si on réalise le produit scalaire entre $x(t)$ et n'importe quelle fonction de la base Φ_k , on isole le coefficient C_k , dont on peut calculer la valeur à l'aide de l'équation 5.8. Dans le cas où les fonctions Φ_k sont complexes, il faudra considérer son conjugué.

$$\int_T x(t) \Phi_k(t) dt = C_0 \int_T \Phi_0(t) \Phi_k(t) dt + C_1 \int_T \Phi_1(t) \Phi_k(t) dt + \dots + C_k \int_T \Phi_k(t) \Phi_k(t) dt + \dots = 0 + 0 + \dots + C_k K + 0 \dots$$

$$\int_T x(t) \Phi_k(t) dt = C_k K$$

$$C_k = \frac{1}{K} \int_T x(t) \Phi_k(t) dt \tag{5.8}$$

Cette décomposition en termes simples présente aussi un intérêt pour l'étude des systèmes linéaires. D'après le théorème de superposition, la réponse d'un système à une excitation $x(t)$ se développant en une série de fonctions périodique $\Phi_k(t)$ peut être déterminée en additionnant les réponses individuelles aux fonctions $\Phi_k(t)$. Pour faciliter l'étude des systèmes linéaires, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il est préférable de choisir des fonctions dont la forme générale n'est pas modifiée par l'effet du système linéaire, comme les fonctions de la famille exponentielle complexe.

5.2.2 Série de fonctions trigonométriques

Les fonctions de la famille exponentielle complexe, qui s'écrivent $f(t) = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t}$ ne sont pas périodiques sauf si $\sigma = 0$. Dans ce cas, la fonction s'écrit : $f(t) = A\cos(\omega t) + jA\sin(\omega t)$ et représente une fonction trigonométrique complexe. En notant T_0 la période commune de tous les termes, la famille de fonctions $e^{jk\omega_0 t}$, avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et $k \in \mathbb{Z}$, forme une base de fonctions orthogonales. En effet, en posant $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, on peut montrer que :

$$\int_0^{T_0} \Phi_m(t) \Phi_n^*(t) dt = \int_0^{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt$$

- si $m = n$, le produit scalaire est égal à : $\int_0^{T_0} \Phi_n(t) \Phi_n^*(t) dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0$.
- si $m \neq n$, le produit scalaire s'annule (le calcul revient à intégrer des fonctions (co)sinusoïdales multiples de la fréquence fondamentale sur une période fondamentale) :

$$\int_0^{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \cos((m-n)\omega_0 t) dt + j \int_0^{T_0} \sin((m-n)\omega_0 t) dt = 0$$

En reprenant les équations 5.4 et 5.8, on en déduit que la fonction pourra se développer sous la forme de la série de fonctions exponentielles complexes suivantes :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.9}$$

où les coefficients $C_k \in \mathbb{C}$ seront calculés par :

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{5.10}$$

Il aurait été possible de faire le même développement en faisant apparaître coefficients réels. En repartant de l'équation 5.10, on peut exprimer le coefficient complexe C_k en fonction de deux coefficients réels, que nous notons A'_k et B'_k .

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) (\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)) dt$$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

$$C_k = A'_k - jB'_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A'_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ B'_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \end{cases}$$

On remarque que le coefficient $B'_k = 0$ pour $k = 0$. De plus, on observe des symétries entre les coefficients pour les valeurs positives et négatives de k : $A'_k = A'_{-k}$ et $B'_k = -B'_{-k}$. A partir de ces coefficients réels, on peut déterminer une nouvelle décomposition de la fonction $x(t)$ en reprenant l'équation 5.9.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = (A'_0 - jB'_0) + \sum_{k=-\infty}^{-1} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t}$$

En utilisant les propriétés de symétries des coefficients, on peut exprimer la décomposition précédente en n'utilisant que des valeurs positives ou nulles pour k . En factorisant les coefficients, les termes exponentielles complexes peuvent être regroupés afin de faire apparaître des fonctions cosinus et sinus, donnant l'équation 5.11.

$$x(t) = A'_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = A'_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A'_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} B'_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j}$$

$$x(t) = A'_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A'_k \cos(k\omega_0 t) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} B'_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) \quad (5.11)$$

Le développement de la fonction $x(t)$ se fait avec des fonctions trigonométriques $\Phi_k^{(1)}(t) = \cos(k\omega_0 t)$ et $\Phi_k^{(2)}(t) = \sin(k\omega_0 t)$, avec $k \in \mathbb{N}^+$ et des coefficients réels A_k et B_k donnés par 5.12 à 5.14.

$$A_0 = A'_0 = C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (5.12)$$

$$A_k = 2A'_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = 2\text{Re}[C_k], \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.13)$$

$$B_k = 2B'_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = -2\text{Im}[C_k], \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.14)$$

On peut vérifier que la famille de fonctions composées de $\Phi_k^{(1)}(t)$ et $\Phi_k^{(2)}(t)$ forme une base de fonctions orthogonales, avec :

$$\int_T \Phi_m^{(k)}(t) \Phi_n^{(l)}(t) dt = \begin{cases} \frac{T_0}{2} & \text{si } m = n \text{ et si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.15)$$

On peut donc décomposer toute les fonctions périodiques $x(t)$ de période T_0 sous la forme d'une série de fonctions trigonométriques, de périodes $\frac{T_0}{k}$. Ce développement est appelé développement en série de Fourier, qui consiste à déterminer des coefficients appelés coefficients de Fourier. Il existe sous différentes formes, que nous allons récapituler dans la prochaine partie.

5.3 Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Nous passons en revue les différentes formes de décomposition en série de Fourier d'une fonction, que l'on suppose à valeurs réels.

5.3.1 Forme trigonométrique

Elle constitue une forme très courante de développement en série de Fourier. Elle est basée sur une décomposition en fonction cosinus et sinus, comme nous l'avons montré avec 5.11. Le développement d'une fonction périodique $x(t)$, de période T_0 en série de Fourier sous la forme trigonométrique s'écrit :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t), \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.16)$$

avec les expressions suivantes pour les coefficients :

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (5.17)$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.18)$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.19)$$

On remarque que le terme A_0 représente la valeur moyenne ou composante continue de la fonction $x(t)$. Le développement en série de Fourier est donc la superposition de la valeur moyenne et de fonctions cosinoïdaux et sinusoïdaux de fréquences positives et multiples de la fréquence fondamentale.

Remarque : bornes de l'intégration pour le calcul des coefficients de Fourier :

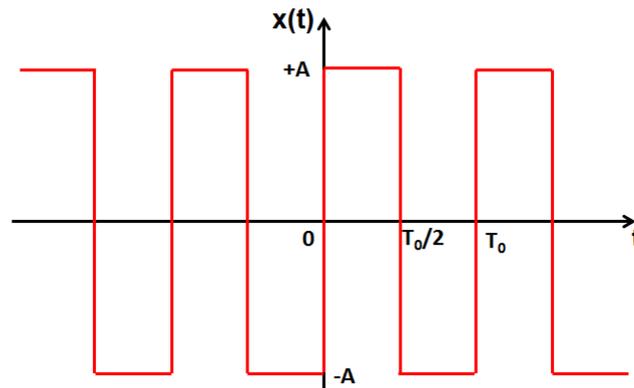
Comme le montre les équations 5.17 à 5.19, le calcul se fait par une intégration du produit entre la fonction à développer et une fonction trigonométrique, sur une période fondamentale. Une question légitime est : où doit-on commencer l'intégration ? La réponse est peu importe. La fonction étant périodique et non bornée dans le temps, on peut faire démarrer une période n'importe où. On peut aussi bien fixer les bornes d'intégration entre 0 et T_0 , qu'entre $-\frac{T_0}{2}$ et $+\frac{T_0}{2}$, le résultat du calcul des coefficients de Fourier restera le même. Le choix des bornes de l'intégration sera uniquement guidé par une simplification du calcul.

Exemple : Développement en série de Fourier d'un signal carré

On se propose de développer en série de Fourier, sous leur forme trigonométrique, la fonction $x(t)$ décrite par la figure ci-dessous et représentant un signal carré de période T_0 définie sur une période fondamentale par :

$$x(t) = \begin{cases} +A & \text{si } t \in [0; \frac{T_0}{2}] \\ -A & \text{si } t \in [\frac{T_0}{2}; T_0] \end{cases}$$

On remarque que le signal a une valeur moyenne nulle donc la composante $A_0 = 0$, ce que confirme le calcul de ce coefficient de Fourier : $A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} (\int_0^{\frac{T_0}{2}} A dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} -A dt) = 0$. L'expression des coefficients de Fourier liés aux termes cosinoïdaux se déterminent à l'aide de

FIGURE 5.1 – Signal carré de période T_0

5.18. La fonction sinus s'annulant pour tous les multiples entiers de π , les coefficients A_k sont tous nuls.

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \left(\int_0^{T_0/2} A \cos(k\omega_0 t) dt + \int_{T_0/2}^{T_0} -A \cos(k\omega_0 t) dt \right)$$

$$A_k = \frac{2A}{k\omega_0 T_0} \left([\sin(k\omega_0 t)]_0^{T_0/2} - [\sin(k\omega_0 t)]_{T_0/2}^{T_0} \right) = \frac{A}{k\pi} (\sin(k\pi) - 0 - \sin(k2\pi) + \sin(k\pi))$$

$$A_k = \frac{2A}{k\pi} \sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Les coefficients de Fourier liés aux termes sinusoïdaux se calculent à l'aide de 5.19.

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \left(\int_0^{T_0/2} A \sin(k\omega_0 t) dt + \int_{T_0/2}^{T_0} -A \sin(k\omega_0 t) dt \right)$$

$$B_k = \frac{2A}{k\omega_0 T_0} \left([-\cos(k\omega_0 t)]_0^{T_0/2} - [-\cos(k\omega_0 t)]_{T_0/2}^{T_0} \right) = \frac{A}{k\pi} (\cos(0) - \cos(k\pi) - \cos(k\pi) + \cos(k2\pi))$$

$$B_k = \frac{2A}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Selon la parité de l'ordre k , ce coefficient ne prend pas la même valeur :

$$B_k = \begin{cases} +0 & \text{si } k \text{ est pair.} \\ \frac{4A}{k\pi} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

La fonction carrée $x(t)$ peut donc se décomposer à l'aide de la série de Fourier suivante :

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} (\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

On remarque que les coefficients de Fourier que l'on a déterminé sont indépendants de la valeur de la fréquence $f_k = \frac{k}{T_0}$, mais seulement de l'ordre du terme trigonométrique. Ainsi, quelle que soit sa fréquence fondamentale, un signal carré présentant la même forme d'onde que $x(t)$ présentera la même décomposition en série de Fourier. Seule la pulsation fondamentale ω_0 changera.

5.3.2 Forme polaire

La forme trigonométrique, faisant apparaître des termes cosinusoidaux et sinusoidaux, peut être transformée pour ne faire apparaître que des termes cosinusoidaux. En effet, on peut remarquer que la série de Fourier 5.16 peut s'écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k) \quad (5.20)$$

avec :

$$\begin{cases} \rho_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \\ \phi_k = -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \rho_k \cos \phi_k \\ B_k = \rho_k \sin \phi_k \end{cases} \quad (5.21)$$

Les coefficients de Fourier définissent cette fois l'amplitude et la phase d'un terme cosinusoidal. Ils constituent donc un vecteur de Fresnel ou phaseur, d'où la notion de forme polaire.

Exemple : Développement en série de Fourier d'un signal carré

On reprend l'exemple précédent mais on cherche cette fois la représentation polaire des coefficients de Fourier. En repartant de la forme trigonométrique, on peut les déterminer :

$$\rho_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = B_k = \frac{4A}{k\pi}, \quad k \text{ entier impaire}$$

$$\phi_k = -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

5.3.3 Forme complexe

Il s'agit de la forme la plus compacte de développement en série de Fourier que l'on privilégie souvent en pratique. Elle est basée sur la décomposition en exponentielle complexe, comme nous l'avons montré avec 5.9. Le développement d'une fonction périodique $x(t)$, de période T_0 en série de Fourier sous la forme complexe s'écrit :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.22)$$

avec les expressions pour les coefficients :

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (5.23)$$

On remarque que le terme $C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$ représente la valeur moyenne de $x(t)$. On remarque aussi le lien entre cette forme et les formes trigonométriques et polaires :

$$2C_k = A_{|k|} - jB_{|k|} = \rho_k e^{j\phi_k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (5.24)$$

Cependant, contrairement aux deux autres formes précédentes, les coefficients de Fourier sont définis pour des ordres positifs et négatifs. En d'autres termes, pour des fréquences positives et négatives. On peut vérifier une propriété de symétrie des coefficients complexes entre les fréquences positives et négatives : ils sont égaux en module, mais opposés en phase. En d'autres termes, les

coefficients sont conjugués.

$$C_k = C_{-k}^* \Rightarrow |C_k| = |C_{-k}| \text{ et } \arg(C_k) = -\arg(C_{-k}) \quad (5.25)$$

Exemple : Développement en série de Fourier d'un signal carré

On reprend l'exemple précédent mais on cherche cette fois la représentation complexe des coefficients de Fourier. En utilisant l'équation 5.23, on détermine :

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_0^{\frac{T_0}{2}} Ae^{-jk\omega_0 t} dt - \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} Ae^{-jk\omega_0 t} dt \right)$$

$$C_k = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} \left([e^{-jk\omega_0 t}]_0^{\frac{T_0}{2}} - [e^{-jk\omega_0 t}]_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \right) = \frac{jA}{k2\pi} (e^{-jk\pi} - 1 - e^{-jk2\pi} + e^{-jk\pi})$$

$$\frac{jA}{k\pi} (e^{-jk\pi} - 1)$$

Si k est pair, $e^{-jk\pi} = 1 \Rightarrow C_k = 0$. Si k est impair, $e^{-jk\pi} = -1 \Rightarrow C_k = \frac{-2jA}{k\pi}$. En comparant les différentes formes des coefficients de Fourier, on vérifie bien l'équation 5.24.

5.3.4 Somme partielle

Le développement en série de Fourier suppose la somme d'un nombre infini de termes trigonométriques ou exponentiels complexes. En pratique, si on cherche à calculer chacun des termes de la série de Fourier, on n'en calculera qu'un nombre fini N. On parle alors de somme partielle S_N , définie par :

$$S_n = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^N B_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=-N}^{+N} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.26)$$

Dans les cas où la série de Fourier d'une fonction existe (nous discuterons de ce point dans la prochaine partie), alors la somme partielle converge vers la décomposition en série de Fourier au fur et à mesure qu'on augmente le nombre N de termes additionnés. L'exemple ci-dessous reprend le signal carré étudié précédemment pour illustrer la convergence de la somme partielle. On prend $A = 1$ et $T_0 = 1s$, d'où une fréquence fondamentale de 1 Hz. Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients de Fourier en fonction de l'ordre. Il montre clairement que plus l'ordre augmente, plus l'amplitude du terme décroît.

Ordre n	A_n	B_n	C_n
1	0	$\frac{4}{\pi}$	$-j\frac{2}{\pi}$
3	0	$\frac{4}{3\pi}$	$-j\frac{2}{3\pi}$
5	0	$\frac{4}{5\pi}$	$-j\frac{2}{5\pi}$
7	0	$\frac{4}{7\pi}$	$-j\frac{2}{7\pi}$
...

La figure 5.2 compare le signal carré et la somme partielle, pour différentes valeurs d'ordre de sommation N. Lorsque N est faible, on voit clairement l'effet de chacun des termes sinusoïdaux qui ajoute une oscillation de période $\frac{T_0}{k}$. Plus on augmente N, plus il est difficile de séparer leurs effets respectifs et la somme partielle reproduit de plus en plus fidèlement le signal carré. Cependant, même en augmentant fortement l'ordre N (par exemple, jusqu'à 99), on observe toujours des oscillations parasites notamment à proximité des transitions du signal. Ce phénomène s'appelle le phénomène de Gibbs. La somme partielle tronque la série de Fourier et supprime les termes

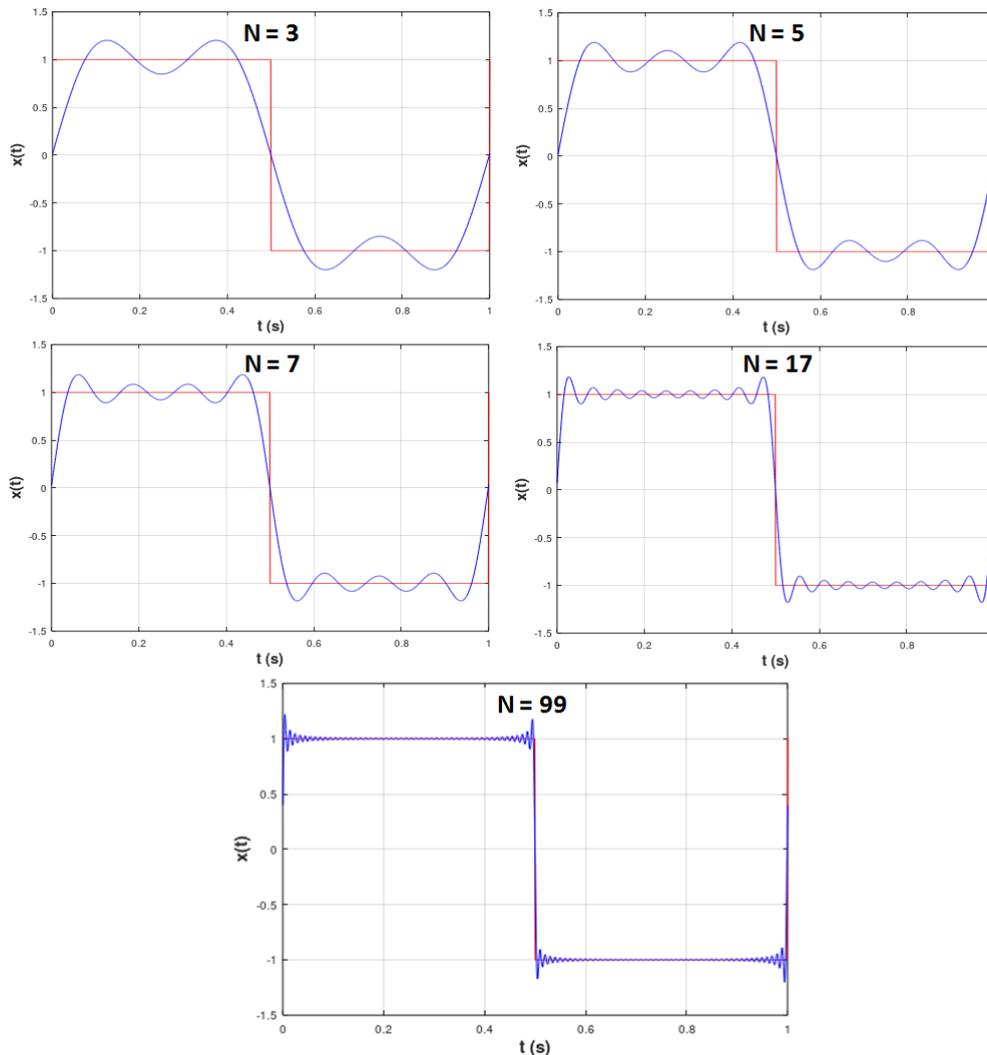


FIGURE 5.2 – Convergence d’une somme partielle (signal carré) en fonction de l’ordre maximale

sinusoïdaux de plus haute fréquence. Or, ce sont ceux-ci qui constituent les variations rapides d’une fonction. Dans un cas pratique, il est donc impossible de faire disparaître le phénomène de Gibbs. Au mieux, on peut le minimiser en augmentant très fortement l’ordre N .

5.4 Convergence des séries de Fourier - Théorème de Dirichlet

Avant de lister les propriétés des séries de Fourier, nous devons aborder une question fondamentale avant de réaliser le développement en série de Fourier : qu’est-ce qui nous garantit la série de Fourier va converger vers la fonction $x(t)$? En effet, le calcul des coefficients repose sur celui de l’intégrale 5.23. Or, si cette intégrale diverge, alors la série de Fourier ne peut pas converger et le développement en série de Fourier devient impossible. Il est donc indispensable de déterminer les conditions qui garantissent cette convergence.

Le but de cette partie n’est pas de démontrer rigoureusement ces conditions, mais simplement de les énoncer. Cette question sera traitée dans le cours d’Analyse et algèbre.

Les conditions de convergence des séries de Fourier sont définies par le théorème de Dirichlet.

Ces questions se posent naturellement dès que la fonction $x(t)$ que l'on cherche à développer présente des discontinuités. Avant de l'énoncé, il est nécessaire de définir certains termes.

5.4.1 Continuité par morceaux

Une fonction $x(t)$ est dite continue par morceaux sur un intervalle I (par exemple $[0; T_0]$) si elle est continue sur I , sauf en un nombre fini de points qui sont des points de discontinuités de première espèce. En un point de discontinuité de première espèce apparaissant en t_i , la fonction a une limite à droite $x(t_i^+)$ et une limite à gauche $x(t_i^-)$.

5.4.2 Classe C^1

On dit qu'une fonction $x(t)$ défini sur un intervalle I est de classe C^1 par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur I , mais aussi si elle est dérivable sur I sauf en un nombre fini de points, avec la dérivée x' continue par morceaux sur I .

5.4.3 Théorème de Dirichlet

Soit x une fonction périodique, de période T_0 , de classe C^1 par morceaux alors la série de Fourier associée à x converge en tout point de discontinuité vers $\frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2}$. Dans le cas complexe, en ce point, la série de Fourier converge vers :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t_i} = \frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2} \quad (5.27)$$

Dans le cas d'une forme trigonométrique, elle converge vers :

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t_i) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t_i) = \frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2} \quad (5.28)$$

Dans cette situation, la série de Fourier converge en tout point de l'intervalle I . On peut donc décomposer la fonction $x(t)$ en une série de Fourier. Dans la majorité des cas pratiques, les signaux périodiques sont continus et dérivables sur toute leur période. Ils respectent les conditions du théorème de Dirichlet et sont donc décomposables en série de Fourier.

Exemple : signal périodique de forme exponentiel

On considère une fonction périodique x , définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par $x(t) = e^t$. Peut-on développer cette fonction en série de Fourier ?

La fonction est continue sur tout l'intervalle, sauf en $t = 0$, puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = e^{2\pi} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = 1$$

Il en est de même pour tous les points $t_k = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La question de convergence de la série de Fourier se pose donc. Cependant, on vérifie que la fonction est continue par morceau sur l'intervalle fondamental, sauf en $t=0$. Mais cette discontinuité est de première espèce puisqu'elle admet une limite à droite et à gauche. Le même raisonnement s'applique à sa dérivée, donc il s'agit d'une fonction de classe C^1 par morceaux. Cela est vrai non seulement sur l'intervalle fondamental, mais aussi sur l'ensemble \mathbb{R} . Les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites et on peut l'appliquer :

- si $t \neq 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, alors la série de Fourier en t converge vers $x(t)$.
- si $t = t_k = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, alors la série de Fourier converge vers $\frac{x(t_k^+) + x(t_k^-)}{2} = \frac{1 + e^{2\pi}}{2}$

On pourra vérifier que le développement en série de Fourier, sous forme complexe, de cette fonction donne :

$$C_k = \frac{1}{2\pi(1-jk)}(e^{2\pi}e^{-jk} - 1)$$

5.5 Propriétés des séries de Fourier

Dans cette partie, nous passons en revue les propriétés des séries de Fourier. Certaines d'entre elles présentent un intérêt pratique certain car elles facilitent le calcul des coefficients de la série.

5.5.1 Linéarité

La décomposition en série de Fourier est une opération linéaire. Le principe de superposition s'applique donc. Soit deux fonctions périodiques $x(t)$ et $y(t)$ dont les développements en série de Fourier, dont les termes respectifs sont notés α_k et β_k . Soit la fonction $z(t) = ax(t) + by(t)$, avec a et $b \in \mathbb{R}$, alors la fonction $z(t)$ est une fonction périodique qui peut aussi être développée en série de Fourier. Ces coefficients de Fourier sont $\gamma_k = a \cdot \alpha_k + b \cdot \beta_k$.

5.5.2 Changement de période

Soit une fonction $x(t)$ possédant une forme donnée. Si sa fréquence fondamentale change, les coefficients de Fourier restent inchangés.

5.5.3 Théorème du retard

Lorsqu'une fonction temporelle est décalée (retardée ou avancée d'une durée t_0), l'amplitude de ses coefficients de Fourier n'est pas affectée. Seule la phase est modifiée (traduisant un décalage temporel de l'ensemble des termes trigonométriques). Soit la fonction $x(t)$ dont les coefficients de Fourier complexes sont notés α_k , et une fonction $y(t)$ une version retardée d'une durée t_0 , alors le développement en série de Fourier de la fonction y peut s'écrire :

$$y(t) = x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$$

Les coefficients de Fourier complexes β_k de la série représentant $y(t)$ s'écrivent donc :

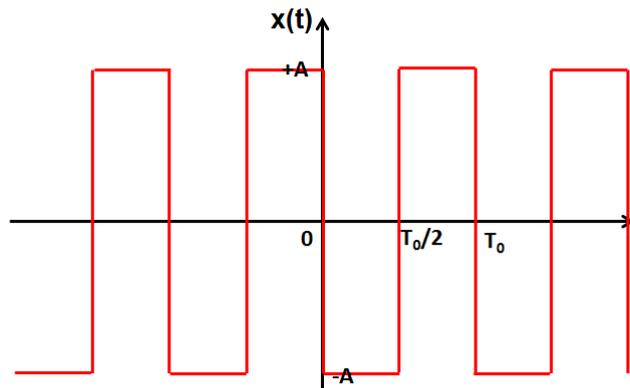
$$\beta_k = \alpha_k e^{-jk\omega_0 t_0} \quad (5.29)$$

Un retard d'une durée t_0 se traduit donc comme une modification de phase égale à $e^{-jk\omega_0 t_0}$ pour l'ensemble des termes de la série de Fourier.

Exemple : signal carré retardé On reprend l'exemple du signal carré précédemment étudié (figure 5.1), mais on le retarde d'une demi période (on remarquera que cela est équivalent à une avance d'une demi période), comme le montre la figure ci-dessous. A partir des coefficients de Fourier C_k , A_k et B_k que nous avons déjà calculé pour le signal carré et du théorème du retard, nous pouvons aisément déduire ceux de cette version retardée. Les termes C_0 et A_0 , représentant la valeur moyenne ne sont pas modifiés. Les coefficients complexes deviennent :

$$C'_k = C_k e^{-jk\omega_0 \frac{T_0}{2}} = C_k e^{-jk\pi} = \frac{jA}{k\pi} (1 - e^{-jk\pi})$$

Seuls les coefficients d'ordre k impair sont non nuls et sont égaux à $C'_k = +\frac{2jA}{k\pi}$. Sous la forme trigonométrique, tous les coefficients A'_k restent nuls. Les coefficients B'_k sont non nuls pour les coefficients d'ordre k impair et égaux à $B'_k = -\frac{4A}{k\pi}$.



5.5.4 Dérivée

Soit une fonction périodique $x(t)$ présentant un développement en série de Fourier complexe, dont les coefficients sont notés α_k . La fonction $y(t) = \frac{dx}{dt}$ est aussi périodique et peut être développée en série de Fourier. Ses coefficients de Fourier β_k sont donnés par :

$$\beta_k = (jk\omega_0)\alpha_k \quad (5.30)$$

De même si $y(t) = \frac{d^m x}{dt^m}$, alors les coefficients de Fourier sont reliés par :

$$\beta_k = (jk\omega_0)^m \alpha_k \quad (5.31)$$

On remarque que pour $k = 0$, le coefficient de rang 0 de la fonction $y(t)$ sera toujours nul. En effet, même si $x(t)$ présente une composante continue, elle sera éliminée par la dérivation.

5.5.5 Intégration

On retrouve la propriété inverse de la propriété de dérivée. Si la fonction $y(t) = \int x(\tau)d\tau$, alors les coefficients de Fourier sont reliés par :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{jk\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z}^* \quad (5.32)$$

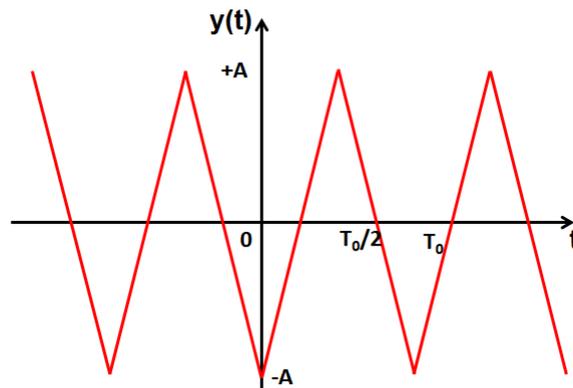
De même si la fonction y est une intégrale multiple d'ordre m de la fonction x , alors les coefficients de Fourier sont reliés par :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{(jk\omega_0)^m}, \quad k \in \mathbb{Z}^* \quad (5.33)$$

On remarque que ces relations ne permettent pas de calculer le coefficient de rang 0, correspondant à la composante continue. L'intégration de $x(t)$ conduit à l'apparition d'une composante continue de valeur arbitraire, sans information supplémentaire sur $y(t)$. La composante continue de $y(t)$ ne peut donc pas se déduire des coefficients de Fourier de la décomposition de $x(t)$.

Exemple : signal triangulaire On considère la fonction y de période T_0 décrite à la figure ci-dessous. Développez en série de Fourier cette fonction.

On peut utiliser les équations 5.23 ou 5.17 pour déterminer l'expression théorique des coefficients de Fourier. Néanmoins, le calcul de l'intégrale va passer par une intégration par partie. Étant donné que nous avons déjà développé en série de Fourier le signal carré $x(t)$ et en remarquant que $y(t) = \frac{4}{T_0} \int x(\tau)d\tau$, on peut facilement déterminer le développement en série de Fourier de la



fonction y en appliquant la propriété d'intégration.

Soit $\alpha_k = \frac{jA}{k\pi}(e^{-jk\pi} - 1)$ les coefficients de Fourier associés à $x(t)$, ceux de $y(t)$, notés β_k seront donnés par :

$$\beta_k = \frac{4}{T_0} \alpha_k \frac{1}{jk\omega_0} = \frac{2\alpha_k}{jk\pi}$$

$$\beta_k = \frac{2A}{(k\pi)^2}(e^{-jk\pi} - 1)$$

On trouve que $\beta_k = 0$ si k est pair et $\beta_k = \frac{4A}{(k\pi)^2}$ si k est impair. En forme trigonométrique, ce coefficient s'écrira : $A_k = \frac{-8A}{(k\pi)^2}$ et $B_k = 0$. Le développement en série de Fourier de la fonction $y(t)$ s'écrit donc :

$$y(t) = \frac{-8A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

5.5.6 Egalités entre coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier, selon la forme employée pour la décomposition de Fourier, sont reliés par les équations suivantes :

$$C_0 = A_0 \quad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad C_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.34)$$

$$A_k = C_k + C_{-k} \quad B_k = C_k - C_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (5.35)$$

5.5.7 Symétries temporelles

Le signal temporel peut présenter différents types de symétries qui peuvent être exploitées pour déterminer efficacement le développement en série de Fourier.

Fonction paire

Si x est une fonction paire, alors $x(t) = x(-t)$. Or, ces deux notations peuvent se développer en série de Fourier :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$x(-t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) - \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

Si $x(t) = x(-t)$, il en résulte que tous les termes B_k sont nuls $\forall k \in \mathbb{N}^+$. On peut aussi en déduire l'égalité suivante pour les coefficients complexes :

$$C_k - C_{-k} = 0 \Rightarrow C_k = C_{-k} \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Il y a donc aussi une symétrie entre les coefficients complexes positifs et négatifs.

Fonction impaire

Si x est une fonction impaire, alors $x(t) = -x(-t)$. On en déduit donc que tous les termes A_k sont nuls. Pour les coefficients complexes, on en déduit une symétrie inverse :

$$C_k + C_{-k} = 0 \Rightarrow C_k = -C_{-k} \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Symétrie demi-onde

Une fonction x présente une symétrie demi-onde si $x(t) = -x(t - \frac{T}{2})$. La figure 5.3 en présente un exemple. Une façon simple de vérifier qu'une fonction présente une symétrie demi-onde consiste à décaler le signal d'une demi période puis à inverser le signe. Si on retrouve le signal initial, alors on peut conclure sur la présence de la symétrie demi-onde.

Il s'agit d'une fonction impaire, donc tous les coefficients A_k sont nuls. Cependant, si on analyse le calcul des termes B_k , on trouve :

$$B_k = \frac{2}{T_0} \left(\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt - \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \right)$$

Si k est paire, alors il y a le même nombre d'alternances de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \frac{T_0}{2}]$ que sur l'intervalle $[\frac{T_0}{2}; T_0]$. Le terme B_k s'annule donc pour tous les ordres k pairs. On en déduit aussi que les coefficients C_k s'annulent pour tous les ordres k pairs.

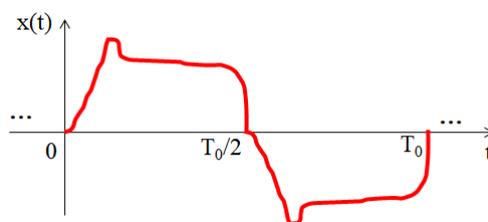


FIGURE 5.3 – Allure d'une fonction présentant une symétrie demi-onde

Symétrie quart-onde

La symétrie quart d'onde est assez proche de la symétrie demi-onde. Elle présente une particularité en plus : la fonction présente une symétrie au point milieu entre les deux demi-périodes. La figure 5.4 en présente un exemple. Si la fonction est paire, les termes A_k s'annulent pour les rangs k pairs. Si la fonction est impaire, les termes B_k s'annulent pour les rangs k pairs.

5.5.8 Cas d'une suite d'impulsions de Dirac ou peigne de Dirac

Le peigne de Dirac $p_{gn}(t)$ est une suite périodique d'impulsions de Dirac. Nous verrons dans le chapitre 7 qu'elle a des propriétés intéressantes d'un point de vue pratique. Ce n'est pas une fonction à proprement parler, mais une distribution. Néanmoins, on peut déterminer une décomposition en

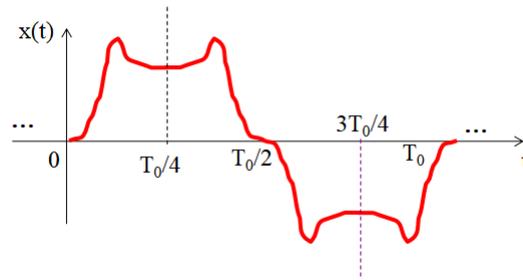


FIGURE 5.4 – Allure d’une fonction présentant une symétrie quart d’onde

série de Fourier. Le peigne de Dirac peut être exprimé par l’équation 5.36. La figure 5.5 illustre son allure.

$$p_{gn}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \quad (5.36)$$

En forme complexe, les coefficients de Fourier sont donnés par :

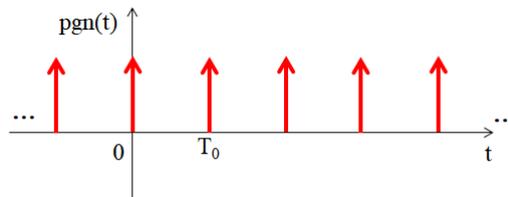


FIGURE 5.5 – Peigne de Dirac

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p_{gn}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} e^{-jk\omega_0 0} = \frac{1}{T_0} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (5.37)$$

Il apparaît que les coefficients de Fourier d’un peigne de Dirac ont tous la même amplitude, quelle que soit la fréquence. La représentation fréquentiel d’un peigne de dirac est donc aussi un peigne de Dirac.

5.6 Représentation en spectre de raies

Le développement d’une fonction périodique en série de Fourier conduit en une somme de fonctions trigonométriques de fréquences différentes, toutes multiples de la fréquence fondamentale. On appelle l’harmonique de rang 1 l’harmonique ou composante fondamentale, car située à la fréquence fondamentale. Les autres sont appelés harmoniques, leur fréquences sont dites harmoniques car multiples de la fréquence fondamentale. Il suffit de connaître le module et la phase de ces fonctions pour reconstituer la fonction initiale.

On peut en déduire une représentation graphique du signal dans le domaine fréquentiel, nommé spectre de raies, illustrée à la figure 5.6. Il consiste à reporter graphique à deux dimensions, où l’axe des abscisses est l’axe fréquentiel, l’amplitude et/ou la phase (voire les parties réelles et imaginaires) des coefficients de Fourier associés à chacune des harmoniques. Le spectre n’est pas une fonction continue en fonction de la fréquence, mais discrète puisque les coefficients de Fourier n’existe que pour un ensemble discret de fréquences. La contribution de chaque harmonique apparaît donc comme une raie dans le spectre.

Habituellement, on parle de spectre lorsqu'on reporte l'amplitude (représentation la plus courante). Il est cependant préférable de distinguer le spectre de raies d'amplitude, lorsqu'on reporte l'amplitude, du spectre de phase lorsqu'on reporte la phase. Si la fonction analysée porte une certaine unité, alors les raies tracées dans le spectre d'amplitude présentent la même unité.

Les figures ci-dessous présentent un exemple de spectre de raies, en amplitude et en phase. Cette représentation suppose des coefficients de Fourier complexes, définis pour des fréquences positives et négatives. Comme nous l'avons vu dans la partie III.3, il y a une symétrie entre les modules des coefficients complexes entre les fréquences positives et négatives, mais une antisymétrie pour la phase. Les harmoniques sont repérées soit par leurs fréquences, soit par leurs rangs k . Cette dernière représentation peut être intéressante car elle devient indépendante de la fréquence fondamentale. Deux signaux périodiques, de même forme mais de périodes fondamentales différentes, présentent le même spectre dans cette représentation.

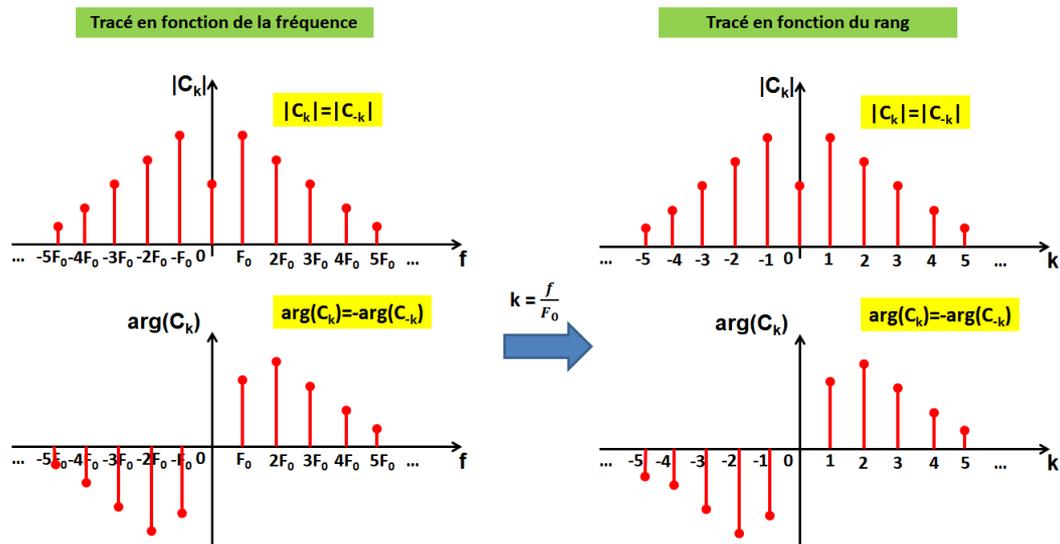


FIGURE 5.6 – Exemple de représentation du spectre de raies en amplitude (en haut) et en phase (en bas)

5.6.1 Analyse spectrale d'un signal

Le développement en série de Fourier permet l'analyse spectrale d'un signal périodique, c'est-à-dire la richesse en composantes harmoniques. L'analyse du signal dans le domaine temporel ne le permet pas nécessairement.

Lorsqu'un signal ne contient qu'une composante fondamentale, on parle de signal monochromatique. Par exemple, le signal sonore généré par un diapason, est caractérisé par une fréquence fondamentale égale à 440 Hz. Ce type de signal est modélisé par une fonction exponentielle de la forme $Re[e^{j\omega_0 t}]$ où $\omega_0 = 2\pi \times 440$. Pour un instrument de musique, cette fréquence fondamentale est accompagnée de fréquences harmoniques c'est-à-dire de composantes sonores dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale. La richesse en harmoniques donne à l'instrument sa spécificité et son timbre pour chaque note. Si on s'intéresse maintenant au langage parlé, les voyelles sont des sons composés de la superposition de signaux dont les fréquences sont des multiples entiers d'une fréquence fondamentale appelée hauteur du son (*pitch* en anglais). Le phénomène physique de génération du son d'une voyelle repose sur l'impact des cordes vocales qui obturent périodiquement l'écoulement continu de l'air provenant des poumons. En aval des cordes, on pourrait mesurer une succession d'impulsions de pression d'air. La fréquence fondamentale de ces impulsions est d'environ 100 Hz pour les hommes et 200 Hz pour les femmes. Ces impulsions

répétitives très brèves sont riches en harmoniques. Le son d'une voyelle différera de celui d'une autre voyelle par l'importance respective des différentes harmoniques.

5.7 Excitation d'un système linéaire par un signal périodique

Lorsqu'un signal périodique $x(t)$ excite un système linéaire à temps invariant, sa réponse peut être facilement déterminée à partir de la décomposition en série de Fourier de l'excitation. C'est ce qu'illustre la figure 5.7. En effet, en raison des propriétés de linéarité du développement en série de Fourier, la réponse $y(t)$ sera égale à la décomposition en série de Fourier de l'excitation $x(t)$, mais dont les coefficients C_k seront pondérés par la fonction de transfert du système H en chacune des fréquences harmoniques de l'excitation. Cette propriété offre un moyen alternatif à la transformée de Laplace pour calculer la réponse d'un système linéaire.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\omega_0) C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.38)$$

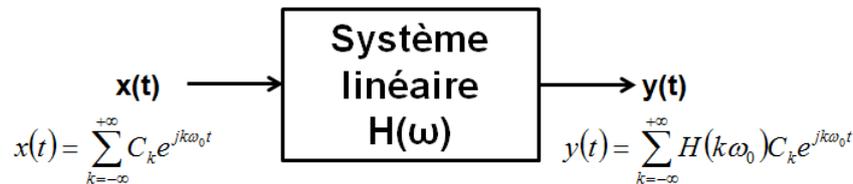


FIGURE 5.7 – Exemple de représentation du spectre de raies en amplitude (en haut) et en phase (en bas)

Une autre propriété des systèmes linéaires apparaît ici : lorsqu'il est excité par un signal avec un contenu spectral donné, un système linéaire ne peut enrichir ce contenu spectral. Autrement dit, de nouvelles composantes harmoniques ne peuvent pas apparaître si le système est linéaire. Autrement, le système est non-linéaire.

5.8 Egalité de Parseval

On considère un signal périodique $x(t)$ de période T_0 , décomposable en une série de Fourier. Chaque terme de la série de Fourier contribue à une partie de la puissance du signal, sans interagir avec les autres termes. La puissance moyenne P_n de chacun de ces membres peut être reliée au coefficient de Fourier, dans leur version complexe selon 5.39. Chacun des coefficients au carré est homogène à une puissance.

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \quad (5.39)$$

La même égalité peut s'écrire avec la version trigonométrique :

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = |A_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (|A_k|^2 + |B_k|^2) \quad (5.40)$$

Nous reviendrons sur les questions de puissance et d'énergie des signaux au chapitre 8.

5.9 Exercices

Exercice 1

1. On dispose du tracé des spectres en amplitude de deux signaux électriques $e(t)$ et $s(t)$, mesurés respectivement en entrée et en sortie d'un filtre linéaire, passif, à temps invariant (figure 5.8). On note $E(f)$ le spectre du signal d'entrée et $S(f)$ celui du signal de sortie. Repérez toutes les aberrations présentes sur les spectres.

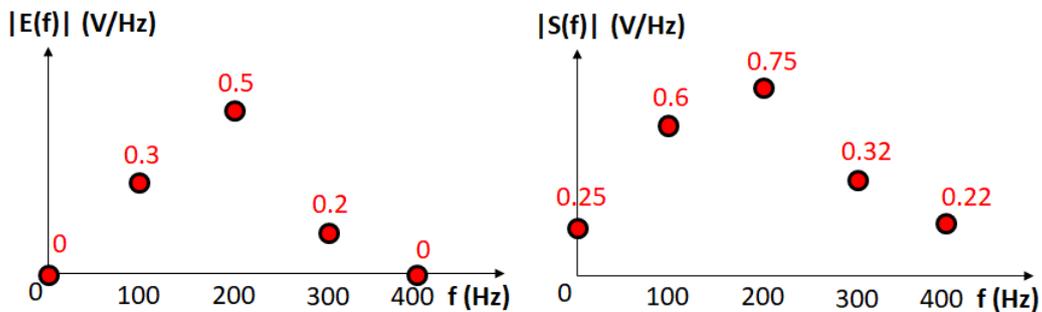


FIGURE 5.8 – Exercice 1 - 1

2. Soit deux signaux périodiques s_1 et s_2 , dont on donne les spectres en amplitude et en phase (figure 5.9). Seules les raies de rang positif ou nul sont représentées. Le signal s_3 est issu de l'addition de ces deux signaux. Déterminez la puissance moyenne du signal s_3 . On tracera aussi le spectre en amplitude et en phase du signal s_3 .

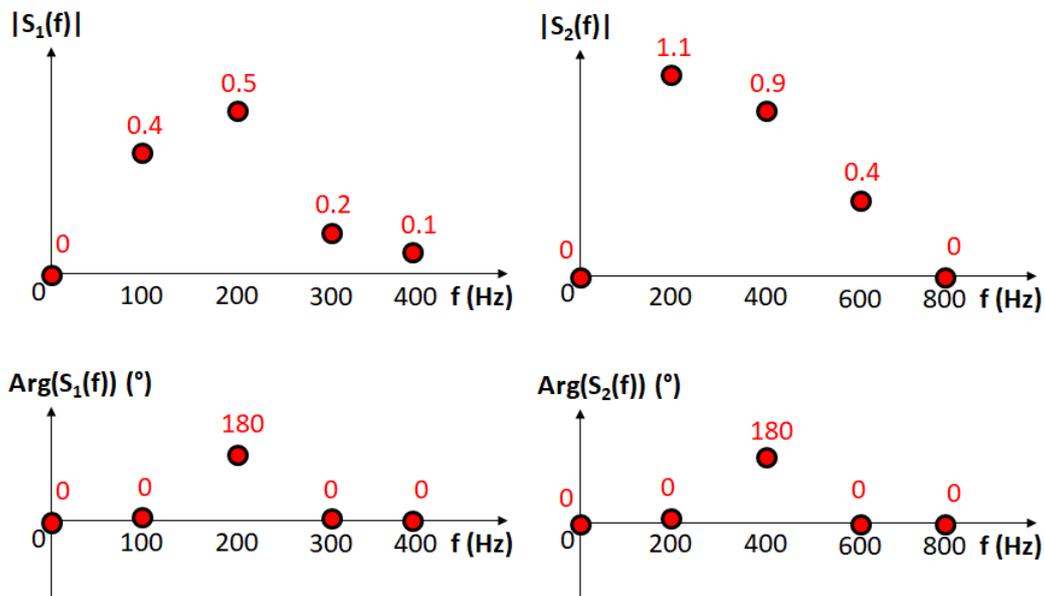


FIGURE 5.9 – Exercice 1 - 2

3. On considère le signal périodique $x(t)$, de période T_0 , dont l'allure est présentée ci-dessous. Sans calcul, indiquez la ou les formes possibles pour la décomposition en série de Fourier de $x(t)$:

- $x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{k\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (\cos(k\frac{\pi}{4}) - \cos(k\frac{3\pi}{4})) \cos(k\omega_0 t)$
- $x(t) = \frac{2A}{k\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (\cos(k\frac{\pi}{4}) - \cos(k\frac{3\pi}{4})) \sin(k\omega_0 t)$
- $x(t) = \frac{2A}{k\pi T_0} \sum_{k=1}^{+\infty} (\cos(k\frac{\pi}{4}) - \cos(k\frac{3\pi}{4})) \sin(k\omega_0 t)$
- $\frac{2}{k\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (\cos(k\frac{\pi}{4}) - \cos(k\frac{3\pi}{4})) \cos(k\omega_0 t)$

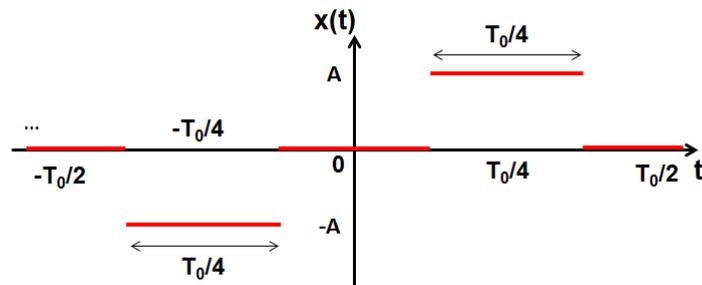


FIGURE 5.10 – Exercice 1 - 3

Exercice 2

Développez en série de Fourier la fonction $f(t) = |\sin(\alpha t)|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ donné.

Exercice 3

Développez en série de Fourier la fonction périodique $x(t)$ présentée ci-dessous. On donnera l'expression des coefficients sous leurs formes trigonométriques et complexes.

Même question pour la fonction $y(t)$.

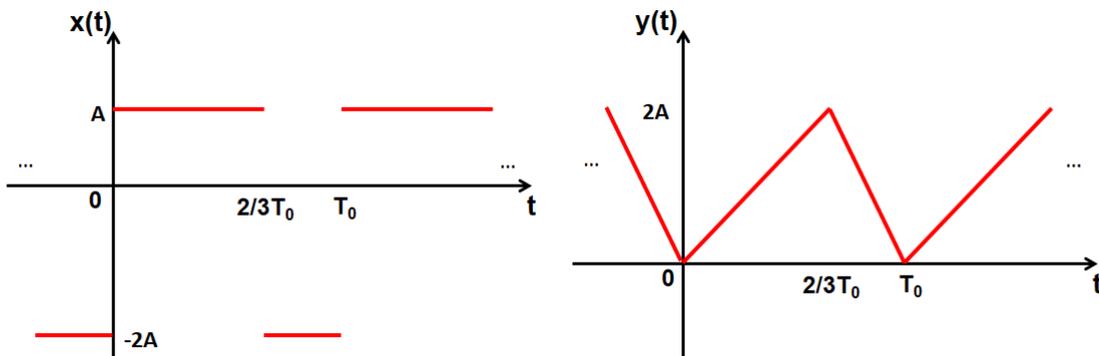


FIGURE 5.11 – Exercice 3

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 4, impaire, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } t \in [0; 1[\\ 0 & \text{si } t \in [1; 2[\end{cases}$$

1. Dessinez le graphe de f . Calculer $f(7)$, $f(\frac{9}{2})$ et $f(\frac{11}{2})$.
2. Calculez les coefficients de Fourier de f .

Exercice 5

Cet exercice est en relation avec l'exemple d'un signal rectangulaire présenté dans le cours. On considère un signal de même nature, de moyenne nulle, de période T_1 , de fréquence f_1 et

d'amplitude 2, représenté par la fonction périodique s . On s'intéresse au produit scalaire de la fonction s avec les fonctions de base $\cos(n\omega_1 t)$, $n = 1, 2$ et 3 où $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. La figure ci-dessous représente sur la première ligne, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction s superposé à celui de la fonction $\cos(\omega_1 t)$ et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire $s(t)\cos(\omega_1 t)$ sur une période T_1 . Sur la deuxième ligne sont représentés, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction s superposé à celui de la fonction $\cos(2\omega_1 t)$ et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire $s(t)\cos(2\omega_1 t)$ sur une période T_1 . Sur la troisième ligne sont représentés, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction s superposé à celui de la fonction $\cos(3\omega_1 t)$ et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire $s(t)\cos(3\omega_1 t)$ sur une période T_1 .

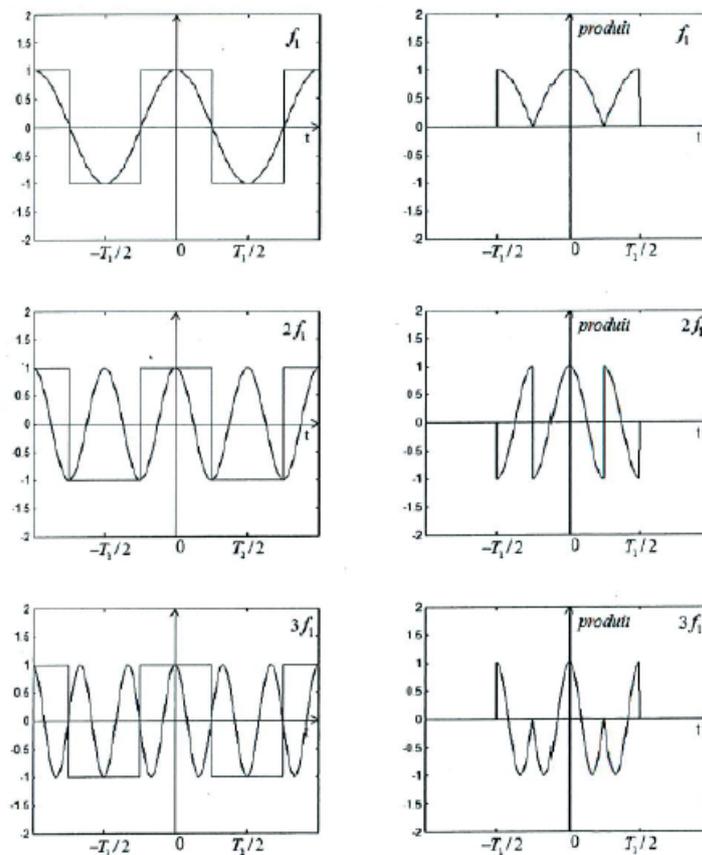


FIGURE 5.12 – Colonne de gauche : graphe de s et de $\cos(\omega_1 t)$, $\cos(2\omega_1 t)$, $\cos(3\omega_1 t)$ - Colonne de droite : graphes de $s(t)\cos(\omega_1 t)$, $s(t)\cos(2\omega_1 t)$ et $s(t)\cos(3\omega_1 t)$.

1. Définir la fonction s .
2. Que représente le produit scalaire de s par une fonction de base $\cos(n\omega_1 t)$, $n = 1, 2$ ou 3 ?
3. Interpréter qualitativement (sans calcul) les trois produits scalaires représentés sur la figure 5.12 en donnant leur signe et une indication de leur valeur algébrique.
4. A quel résultat (sans calcul) peut-on s'attendre si on effectue le produit scalaire de s par les fonctions de bases $\sin(n\omega_1 t)$, $n = 1, 2$ ou 3 ? ?
5. En considérant le signal s comme un signal retardé par rapport au signal étudié en cours et en utilisant les résultats établis dans le cours, calculer les coefficients de Fourier exponentiels de s . Donner la série de Fourier associée à s .

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0;1[$ de \mathbb{R} par $f(t) = t$. On considère f comme la restriction de fonctions g_i avec $i = 1, 2$ ou 3 , périodiques et continues par morceaux sur \mathbb{R} . On se propose de déterminer plusieurs expressions de f sur $]0;1[$ à partir du développement en séries de Fourier des fonctions g_i .

1. On considère la fonction g_1 , périodique, de période $T_1 = 3$, définie par $\forall t \in [0;3[$ $g_1(t) = t$.
 - a. Représentez la fonction g_1 sur l'intervalle $[-3;6]$.
 - b. Calculez les coefficients de Fourier de g_1 et donnez la série de Fourier S_1 associée à g_1 .
 - c. Étudiez la convergence de S_1 .
 - d. En déduire le développement en série de Fourier de f sur $]0;1[$.

2. On considère la fonction g_2 , impaire, périodique, de période $T_2 = 2$, définie par $\forall t \in [0;1[$ $g_2(t) = t$.
 - a. Représentez la fonction g_2 sur l'intervalle $[-3;3]$.
 - b. Calculez les coefficients de Fourier de g_2 et donnez la série de Fourier S_2 associée à g_2 .
 - c. Étudiez la convergence de S_2 .
 - d. En déduire le développement en série de Fourier de f sur $]0;1[$.

3. On considère la fonction g_3 , paire, périodique, de période $T_3 = 2$, définie par $\forall t \in [0;1[$ $g_3(t) = t$.
 - a. Représentez la fonction g_3 sur l'intervalle $[-4;4]$.
 - b. Calculez les coefficients de Fourier de g_3 et donnez la série de Fourier S_3 associée à g_3 .
 - c. Étudiez la convergence de S_3 .
 - d. En déduire le développement en série de Fourier de f sur $]0;1[$.

Exercice 7

Donnez la définition, la période et la parité des fonctions représentées par les séries de Fourier suivantes et tracez leur graphe :

1. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nt) = \sin(t)$ avec $t \in [0; \pi]$
2. $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) = 1$ avec $t \in [0; 1]$
3. $\pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \sin(nt) = t$ avec $t \in [0; 2\pi]$

Exercice 8 - Signal de forme exponentielle

On considère la fonction x définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , de période $T = 2\pi$, par $x(t) = e^t$ pour $t \in [0; +2\pi[$.

1. Tracez la fonction $x(t)$ sur l'intervalle $[-2\pi; +2\pi[$.
2. Cette fonction admet-elle un développement en série de Fourier ?
3. Montrez que les coefficients de Fourier sous la forme exponentielle sont égaux à $c_n = \frac{1+jn}{2\pi(1+n^2)}(e^{2\pi} - 1) \forall n \in \mathbb{Z}$.

4. En déduire les expressions des coefficients de Fourier sous leur forme trigonométrique.
5. Calculez la puissance moyenne des harmoniques, quelle que soit leur rang.
6. Calculez la puissance moyenne du signal.

Exercice 9 - Modulation à largeur d'impulsion

La modulation à largeur d'impulsion (MLI) (Pulse Width Modulation (PWM) en anglais) est une technique couramment utilisée en électronique pour générer un signal analogique à partir d'un signal discret à deux états. Le signal MLI $s_p(t)$ est constitué d'une suite périodique, de période T , d'impulsions $s_i(t)$ définie par :

$$s_i(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0; \alpha T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\alpha \in [0; 1]$ est appelé le rapport cyclique du signal (duty ratio en anglais). Le principe est illustré à la figure 5.13. Réciproquement, à partir d'un signal analogique de valeurs comprises entre 0 et A , un modulateur MLI va produire le signal MLI à partir de deux niveaux de tension seulement.

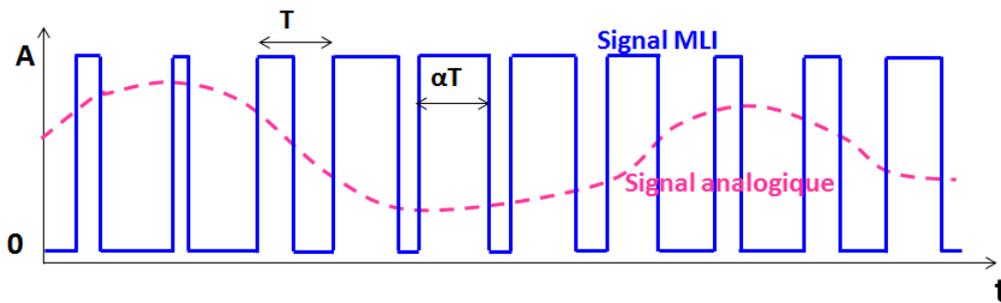


FIGURE 5.13 – Illustration modulation MLI

1. Vérifiez si on peut développer $s_i(t)$ et $s_p(t)$ en séries de Fourier.
2. Calculez les coefficients de Fourier exponentiels du signal MLI $s_p(t)$ et vérifiez la relation avec les coefficients de Fourier réels.
3. Que deviennent ces coefficients si l'on considère le signal $s_p(t)$ de même période mais retardé d'un temps $\tau \in \mathbb{R}^*$.
4. Calculez la puissance moyenne du signal, ainsi que celles de la somme de tous les termes de la série de Fourier mis au carré. Sont-elles égales ?
5. Quelle est la puissance moyenne transportée par le premier harmonique ?
6. Une manière économique de reconstituer un signal analogique à partir du signal MLI est de le filtrer, à l'aide d'un filtre passe-bas que l'on supposera idéal. Sa fréquence de coupure est notée f_c . Quelle est la forme du signal selon f_c ? Quelle fréquence de coupure choisiriez-vous pour que le signal en sortie du filtre soit constant et proportionnel au rapport cyclique ? Est-ce un bon choix

pour reconstituer le signal analogique ?

7. Quelle est la puissance moyenne du signal en sortie du filtre ? En déduire le rendement du système de conversion ?



6. Transformée de Fourier

La décomposition en série de Fourier est un formidable outil d'analyse des signaux, mais aussi un moyen d'étude de la réponse des systèmes linéaires. Cependant, il est limité aux signaux périodiques, non bornés dans le temps. La transformée de Fourier constitue une extension de la décomposition en série de Fourier à toutes les fonctions dites apériodiques, bornées dans le temps. Dans ce chapitre, nous allons présenter de manière simple le passage de la décomposition en série de Fourier vers la transformée de Fourier, dont nous préciserons l'expression. Elle permet le passage du domaine temporel vers le domaine fréquentiel. Une transformée inverse est donc requise pour assurer le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel : c'est le rôle de la transformée de Fourier. Nous préciserons les propriétés de la transformée de Fourier. Nous verrons qu'elles sont similaires non seulement à celles des séries de Fourier, mais aussi à celles de la transformée de Laplace.

6.1 De la série de Fourier à la transformée de Fourier

Le développement en série de Fourier suppose un signal périodique. Le raisonnement que nous proposons dans cette partie va nous permettre d'étendre ce développement aux signaux apériodiques. Un signal apériodique peut être vu comme un signal périodique de période infinie. Analysons les conséquences de ce passage à l'infini sur le développement en série de Fourier et le calcul des coefficients de Fourier.

Prenons le signal périodique $x(t)$ illustré ci-dessous. Le signal est constitué d'une impulsion à durée Δ limitée, répétée tous les $n \cdot T_0$. Un développement en série de Fourier peut être réalisé pour déterminer le contenu spectral du signal. Le spectre est discret, avec une infinité d'harmoniques de la composante fondamentale à la fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$. L'amplitude des coefficients décroît avec la fréquence selon une enveloppe donnée.

Supposons qu'on élargisse la période sans toucher à la durée Δ de l'impulsion, comme le montre la figure 6.2. Dans le domaine fréquentiel, les raies se rapprochent puisque la fréquence fondamentale f_0 a diminué. Leurs amplitudes suivent toujours la même enveloppe. Que se passe-t-il si on poursuit l'augmentation de la période, en faisant tendre T_0 vers l'infini ? Le signal $x(t)$ devient un signal apériodique, borné dans le temps. Dans le domaine fréquentiel, l'écart entre chaque raie

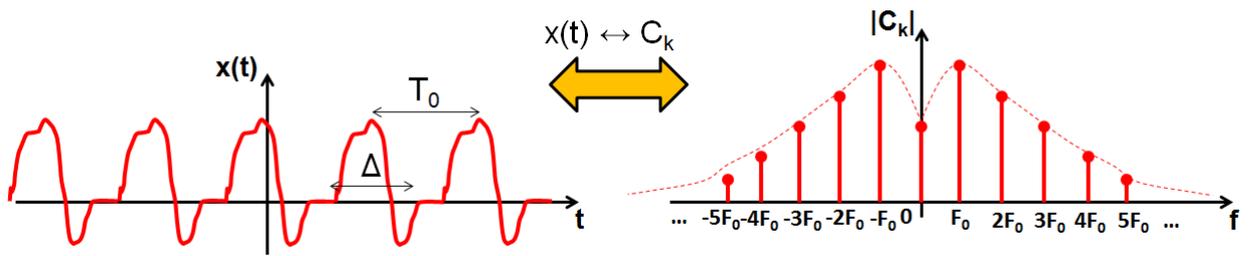


FIGURE 6.1 – Signal périodique (à gauche) et spectre (à droite)

s'annule et le spectre devient continu. Le spectre est donc défini à toutes les fréquences f , $\forall f \in \mathbb{R}$.

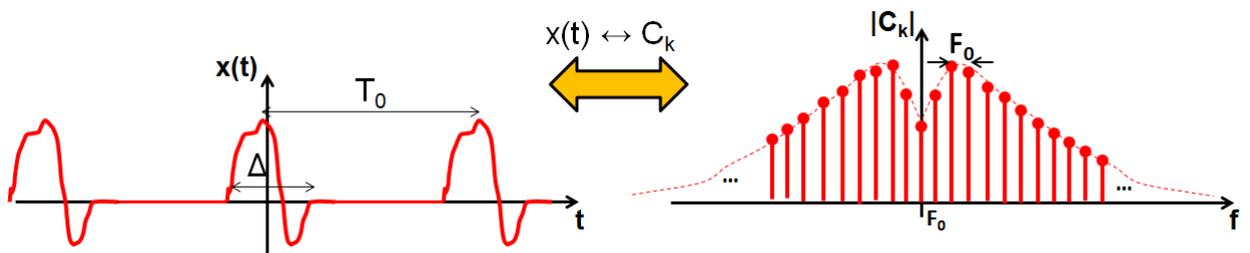


FIGURE 6.2 – Augmentation de la période du signal (à gauche) et effet sur le spectre (à droite)

Un premier problème se pose : la décomposition du signal comme une somme discrète de composantes harmoniques n'est plus adaptée puisque le spectre est continu. Ce problème est facilement résolu : en faisant tendre T_0 vers l'infini, la somme devient une intégration. Le second problème dans le calcul des coefficients de Fourier vient du terme $\frac{1}{T_0}$, qui annule l'ensemble des coefficients de Fourier C_k . Une solution consiste à multiplier les coefficients de Fourier par la période T_0 permettant de revenir à une valeur finie. En considérant ces deux modifications, et en notant $f_0 = df$ tel que $\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} df = 0$ et $kxdf = f$, on peut écrire une nouvelle formule pour calculer le spectre (6.1) en repartant de la formule de calcul des coefficients de Fourier. Comme celui-ci est continu, on le note $X(f)$ (figure 6.3).

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} T_0 \cdot C_k = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} T_0 \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = X(f) \quad (6.1)$$

De même, on peut modifier la formule de décomposition en série de Fourier et déterminer une relation entre le signal $x(t)$ et son spectre $X(f)$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk2\pi f t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k T_0 f_0 e^{jk2\pi f t}$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt \quad (6.2)$$

Ces deux nouvelles relations constituent la transformée de Fourier directe (du domaine temporel au domaine fréquentiel) et inverse (du domaine fréquentiel au domaine temporel).

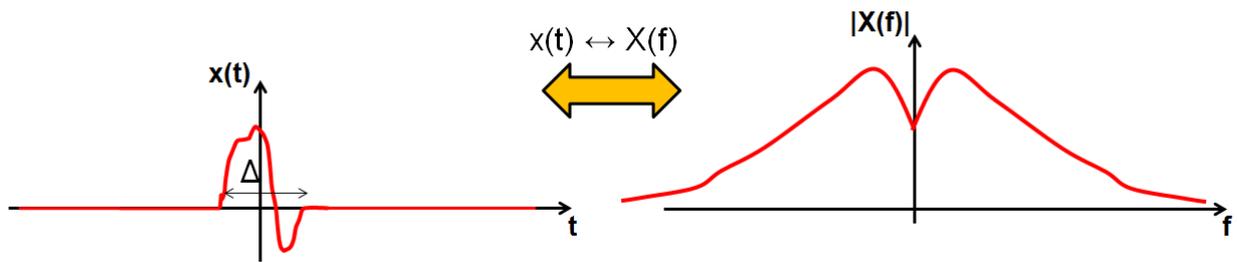


FIGURE 6.3 – Signal aperiodique (à gauche) et spectre continu (à droite)

6.2 Transformées de Fourier

La transformation de Fourier constitue donc une généralisation du développement en série de Fourier pour les signaux aperiodiques à support temporel borné. Elle dispose des mêmes propriétés que les séries de Fourier. On peut aussi étendre la transformée de Fourier aux signaux périodiques.

L'équation 6.3 donne l'expression de la transformée de Fourier, que l'on qualifie parfois de directe. Elle peut être vue comme un opérateur noté \mathcal{F} . Elle permet de calculer le spectre $X(f)$ d'un signal temporel $x(t)$, $\forall f \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$. La transformée de Fourier s'applique sur des signaux temporels à valeurs réels ou complexes. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des signaux temporels à valeurs réels. Par contre, le spectre $X(f)$ est à valeurs complexes.

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.3)$$

L'équation donne l'expression de la transformée de Fourier inverse, permettant de retrouver le signal temporel $x(t)$ à partir de son spectre. Elle peut aussi être vue comme un opérateur noté \mathcal{F}^{-1} .

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df \quad (6.4)$$

La transformation de Fourier est bijective et unique : la transformée de Fourier de deux signaux temporels différents donnent deux spectres différents. Inversement, la transformée de Fourier inverse de deux spectres différents donne deux signaux temporels différents.

Les transformées de Fourier directe et inverse peuvent être réécrites en remplaçant la fréquences par la pulsation $\omega = 2\pi f$, donnant des relations plus compactes.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.5)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{+j\omega t} df \quad (6.6)$$

Lien avec la transformée de Laplace : Lorsqu'on compare les expressions des transformées de Fourier et de Laplace bilatérale (équation 3.5), on remarque que les expressions sont quasi identiques. En prenant le cas particulier où $p = j\omega$, on retrouve l'expression de la transformée de Fourier à partir de celle de Laplace. Même chose pour leur transformées inverses.

La transformation de Laplace constitue donc une généralisation de la transformation de Fourier. Les propriétés de la transformée de Laplace, vues dans le chapitre 3, se retrouveront donc lorsqu'on étudiera celles de la transformée de Fourier.

6.3 Représentation du spectre

Comme pour le développement en série de Fourier, le résultat de la transformée de Fourier peut être visualisé sous la forme d'un spectre tracé dans le domaine fréquentiel. A la différence du spectre d'un signal périodique, le spectre d'un signal apériodique est continu, donc défini pour toutes les fréquences $f \in \mathbb{R}$.

Le résultat de la transformée de Fourier étant une grandeur complexe, le module et la phase sont représentées, comme l'illustre la figure 6.4. Une représentation des parties réelles et imaginaires est aussi envisageable. Le mot spectre est généralement réservé pour la représentation de l'amplitude. En effet, il s'agit de la représentation la plus courante, car elle permet de visualiser très rapidement la distribution de l'énergie d'un signal dans le domaine fréquentiel. Cela est à l'origine d'une erreur courante. En ne représentant que l'amplitude du spectre, on omet la phase faisant du spectre une valeur réelle. Si on cherche à retrouver la forme temporelle du signal en omettant la phase, le résultat est bien entendu faussé.

Lorsqu'on trace le spectre d'un signal $x(t)$ périodique, l'unité de chaque raie du spectre d'amplitude est la même que le signal $x(t)$, puisque chaque raie symbolise un terme de la décomposition en série de Fourier. Par exemple, si le signal $x(t)$ représente l'évolution temporelle d'une tension exprimée en V, chaque raie représente une tension exprimée en V. L'unité du spectre de raies en amplitude est donc le volt dans cet exemple. Mais est-ce toujours le cas pour le spectre continu d'un signal périodique $x(t)$? Est-ce que l'amplitude de son spectre $|X(f_0)|$ à une fréquence f_0 porte la même unité que le signal temporel ?

En repartant de l'équation de la transformée de Fourier inverse (6.4), on se rend compte que ça n'est pas le cas. En effet, on retrouve le signal temporel en l'intégrant sur un le domaine fréquentiel. En d'autres termes, on le retrouve en multipliant le spectre à chaque fréquence par un intervalle élémentaire de fréquence, et en sommant ces produits élémentaires. On en déduit que le spectre n'est pas homogène à l'amplitude, mais à une densité spectrale d'amplitude, soit un rapport entre l'amplitude et un intervalle de fréquence. Ainsi, lorsqu'on trace l'amplitude du spectre, on trace en fait sa densité spectrale d'amplitude. Pour alléger la tournure, on préfère parler abusivement d'amplitude. En reprenant l'exemple du signal électrique exprimé en V, la représentation de la densité spectrale d'amplitude est exprimée en V/Hz (ou en $V/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).

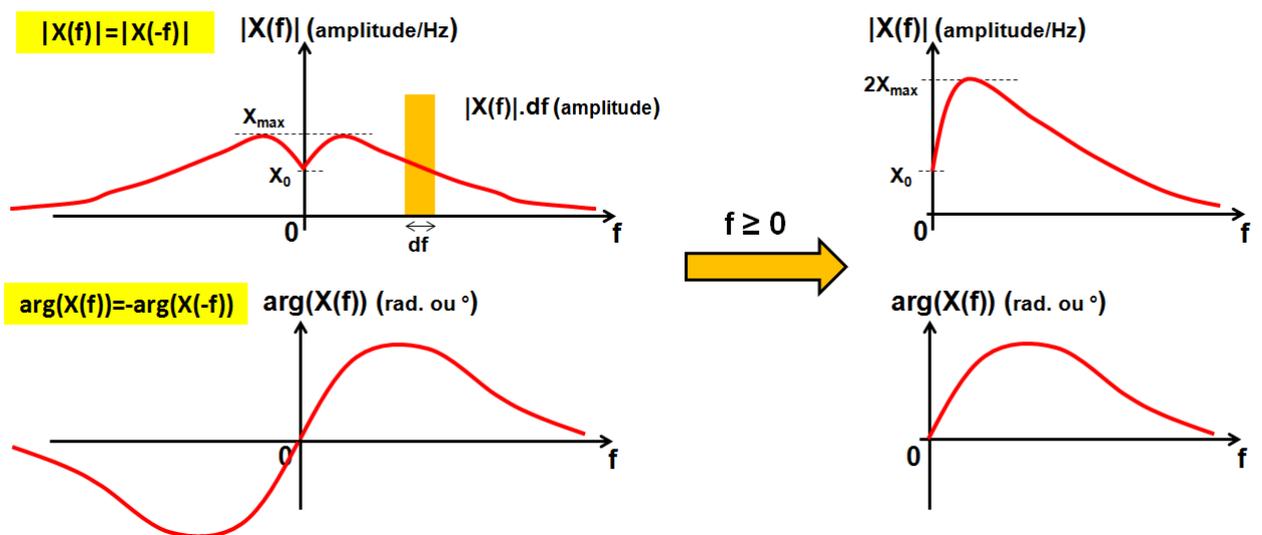


FIGURE 6.4 – Représentation du spectre : symétrique (à gauche) et asymétrique (à droite)

On retrouve les mêmes propriétés de symétries du spectre entre les fréquences positives et

négligées qu'avec la décomposition en série de Fourier. Le module est symétrique par rapport à $f = 0$, tandis que la phase est antisymétrique. Autrement dit, le spectre à la fréquence $-f$ est le conjugué du spectre à la fréquence f . Leurs parties réelles sont égales, mais leurs parties imaginaires sont opposées.

$$|X(f)| = |X(-f)| \quad \text{Arg}(X(f)) = -\text{Arg}(X(-f)) \quad (6.7)$$

$$X(f) = X(-f)^* \Rightarrow \text{Re}(X(f)) = \text{Re}(X(-f)) \quad \text{et} \quad \text{Im}(X(f)) = -\text{Im}(X(-f)) \quad (6.8)$$

Dans le cas d'un signal temporel à valeurs réelles, la représentation que nous avons présentée est dite symétrique car elle présente le spectre sur les fréquences positives et négatives. Afin d'alléger cette représentation, il est courant de tracer une représentation asymétrique, c'est-à-dire ne représentant le spectre que pour les fréquences positives ou nulles. Elle est illustrée à la figure 6.4. Cependant, si on conserve inchangé la densité spectrale d'amplitude et si on n'exploite que le spectre sur le domaine fréquentiel positif, on risque de diviser par deux l'amplitude du signal. Afin d'éviter toute ambiguïté, cette représentation asymétrique nécessite de doubler la densité spectrale d'amplitude (sauf en $f = 0$). Ainsi, en intégrant sur tout le domaine fréquentiel les densités spectrales d'amplitude des deux représentations, on retrouve la même amplitude. Pour retrouver la représentation spectrale symétrique, il faudra :

- on divise par deux le module et on le duplique du côté des fréquences négatives
- on duplique la phase que l'on inverse du côté des fréquences négatives.

Il est à noter que le même procédé aurait pu être utilisé pour une représentation spectrale asymétrique de la décomposition en série de Fourier.

6.4 Exemples de calcul de transformée de Fourier

Dans cette partie, le calcul de la transformée de Fourier est illustré à travers trois exemples de fonctions courantes.

6.4.1 Fonctions porte et sinus cardinal

La fonction porte $\Pi_\tau(t)$, illustrée ci-dessous, est une impulsion rectangulaire de durée τ centrée par défaut en $t = 0$. Nous normalisons son amplitude à 1. Une autre notation possible, adaptée au cas où l'impulsion ne serait pas centrée en 0 est la suivante : $\Pi_{[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]}(t)$. Nous cherchons la transformée de Fourier de cette fonction, en appliquant l'équation 6.3.

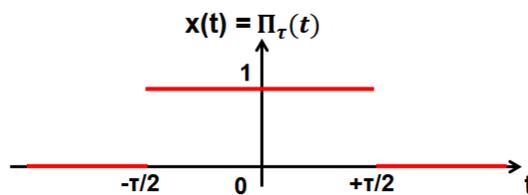


FIGURE 6.5 – Fonction porte

$$\Pi_\tau(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_\tau(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} 1 e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi ft}]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

$$\Pi_{\tau}(f) = \frac{1}{-j2\pi f} (e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{\tau}{2}}) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f}$$

Le résultat fait apparaître une fonction particulière appelée sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, qui s'annule à chaque fois que $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Cette fonction est maximale en $x = 0$ et devient égale à 1. Le résultat de la transformée de Fourier d'une fonction porte est donc une fonction sinus cardinal tel que :

$$\Pi_{\tau}(f) = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = \tau \text{sinc}(\pi f \tau) \quad (6.9)$$

Le résultat est illustré sur la figure 6.6. Le spectre est purement réel. Il est maximal en $f = 0$ (composante continue). Il s'annule à chaque fois que $\pi f \tau = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, donc pour $f = \frac{k}{\tau}$.

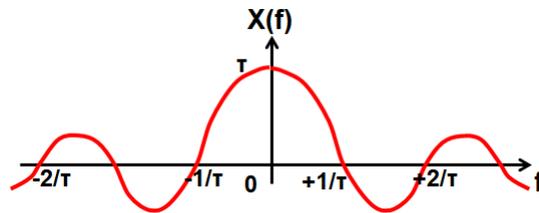


FIGURE 6.6 – Transformée de Fourier d'une fonction porte : sinus cardinal

Ces deux fonctions sont fortement liées par la transformée de Fourier. Pour l'illustrer, considérons le spectre $X(f)$ d'un signal qui serait borné dans le domaine fréquentiel. En notant $\frac{1}{\tau}$ la plage fréquentielle occupée par le spectre, celui-ci peut être modélisé par une fonction porte $\Pi_{\frac{1}{\tau}}(f)$. On cherche à déterminer le signal temporel $x(t)$ qui possède un tel spectre, en calculant la transformée de Fourier inverse.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\frac{1}{\tau}}(f) e^{+j2\pi f t} df = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{+j2\pi f t} df$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi t \tau} [e^{+j2\pi f t}]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\pi t \tau} \frac{e^{j\pi \frac{t}{\tau}} - e^{-j\pi \frac{t}{\tau}}}{2j} = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\tau})}{\pi t \tau} = \frac{1}{\tau} \text{sinc}(\pi \frac{t}{\tau})$$

Le résultat indique que la transformée de Fourier d'une fonction sinus cardinal est une fonction porte ! Il est intéressant de noter une dualité entre les domaines temporels et fréquentiels : le spectre d'un signal borné dans le temps est non borné dans le domaine fréquentiel. Inversement, un signal borné en fréquence n'est pas borné dans le domaine temporel.

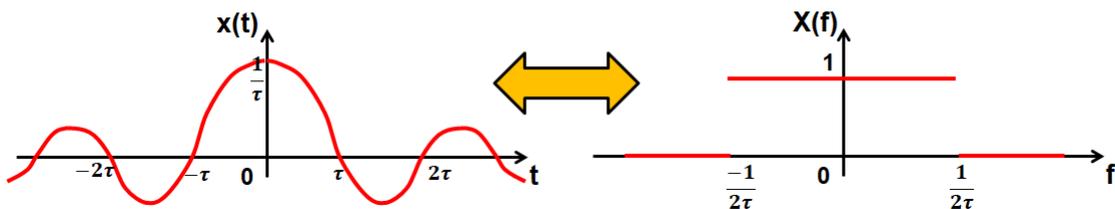


FIGURE 6.7 – Transformée de Fourier d'une fonction sinus cardinal : une fonction porte

6.4.2 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac n'est certes pas une fonction (c'est une distribution), mais on peut calculer sa transformée de Fourier.

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f0} = 1 \quad (6.10)$$

La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac est constante et égale à 1. Le spectre est uniforme quelle que soit la fréquence, correspondant à un signal "blanc". Il rejoint la remarque faite précédemment sur la dualité entre des signaux bornés dans le temps et bornés en fréquence. La durée de l'impulsion de Dirac est infiniment brève. Il en résulte un spectre infiniment large !

Ce résultat est conforme à la définition de l'impulsion de Dirac, dont l'amplitude est infinie. La valeur '1' correspond à une densité spectrale d'amplitude. Pour revenir à l'amplitude du signal, il faudrait intégrer cette valeur sur tout le domaine fréquentiel, conduisant à une amplitude infinie.

On peut aussi s'intéresser à la transformée de Fourier inverse d'une impulsion de Dirac, centrée sur une fréquence f_0 . Une telle distribution se note $\delta(f - f_0)$. Elle indique un spectre dont toute la densité spectrale d'amplitude est concentrée en un point de fréquence f_0 . L'amplitude du signal temporel associé sera donc finie et il pourra être représentée par une fonction. On peut cependant remarquer qu'un tel spectre ne peut être celui d'un signal réel, puisque le spectre n'est pas symétrique. Le résultat, indiqué ci-dessous, le confirme : la transformée de Fourier inverse d'une impulsion de Dirac est une exponentielle complexe. Dans le cas où l'impulsion de Dirac est centrée en $f=0$, le spectre redevient symétrique et correspond à celui d'un signal continu égal à 1.

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(f - f_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{+j2\pi ft} df = e^{+j2\pi f_0 t} \quad (6.11)$$

6.4.3 Fonctions cosinus et sinus

De prime abord, la transformée de Fourier d'une fonction sinusoidal ou cosinusoidal ne semble pas une question compliquée. Comme il s'agit de fonctions périodiques, on peut les développer en séries de Fourier. Celles-ci ne sont constitués que de la composante harmonique fondamentale. On s'attend donc à ce que la transformée de Fourier de ces fonctions puissent être représentée par deux impulsions de dirac, centrées en f_0 et en $-f_0$.

Cependant, si on applique la transformée de Fourier à une fonction (co)sinusoidale, on arrive à une difficulté de calcul sérieuse. Prenons l'exemple d'une fonction cosinusoidal et appliquons l'opérateur transformée de Fourier. Le cosinus peut être développé sous la forme de deux exponentielles complexes :

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 + \omega)t}}{2} dt$$

Il nous faut intégrer deux termes exponentiels complexes sur l'ensemble des réels, sachant que ces fonctions ne convergent pas vers une valeurs finie lorsque t tend vers l'infini. La résolution de ces intégrales n'est pas triviale et nécessite la mise en œuvre de concepts mathématiques qui dépassent le cadre de ce cours.

Une solution, plus simple, consiste à utiliser le résultat de la partie précédente, qui nous à montrer que la transformée de Fourier d'une exponentielle complexe, de fréquence f_0 , est l'impulsion de Dirac $\delta(f - f_0)$. Puisque la fonction cosinus est la superposition de deux exponentielles

complexes, de fréquence f_0 et $-f_0$, on peut facilement en déduire la transformée de Fourier d'une fonction cosinoïdale :

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{\delta(f - f_0)}{2} + \frac{\delta(f + f_0)}{2} \quad (6.12)$$

De même, on peut en déduire celle d'une fonction sinusoïdale :

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{\delta(f - f_0)}{2j} - \frac{\delta(f + f_0)}{2j} \quad (6.13)$$

Le spectre de ces deux fonctions est représenté sur la figure 6.8 .

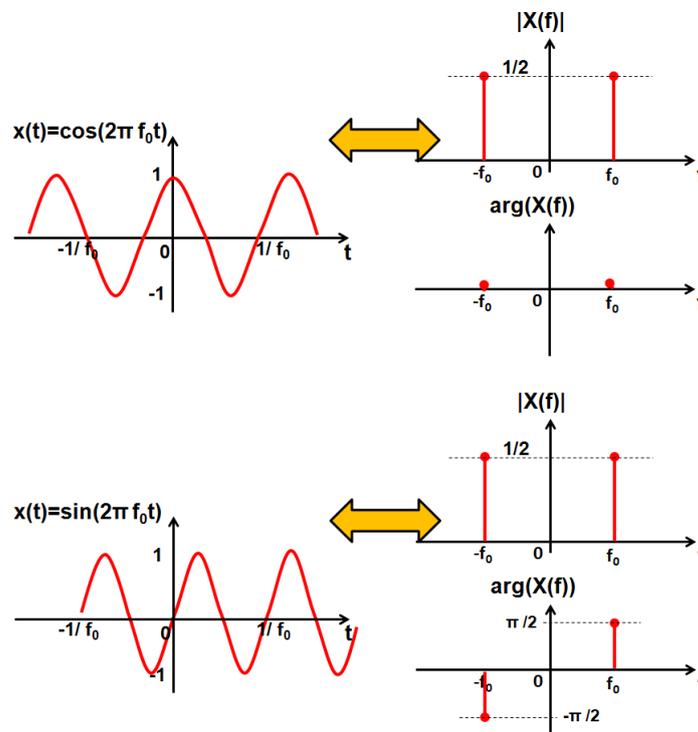


FIGURE 6.8 – Transformée de Fourier des fonctions cosinus et sinus

6.5 Propriétés de la transformée de Fourier

On retrouve les mêmes propriétés que pour la décomposition en série de Fourier et la transformée de Laplace. Le tableau 6.1 récapitule les propriétés principales.

6.6 Table de transformée de Fourier courante

Le tableau 6.2 récapitule les transformées de Fourier de fonctions courantes.

6.7 Excitation d'un système linéaire par un signal périodique

Lorsqu'un signal $x(t)$ excite un système linéaire à temps invariant, sa réponse peut être facilement déterminée à partir de sa transformée de Fourier de l'excitation. C'est ce qu'illustre la figure

TABLE 6.1 – Tableau récapitulatif des propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité	$ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(f) + bY(f)$
Théorème du retard	$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Théorème du changement d'échelle $y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{ a }X(\frac{f}{a})$
Dérivée temporelle	$y(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Leftrightarrow Y(f) = (j2\pi f)^k X(f)$
Dérivée fréquentielle	$Y(f) = \frac{d^k X(f)}{df^k} \Leftrightarrow y(t) = (-j2\pi t)^k x(t)$
Intégration temporelle	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$
Produit de convolution dans le domaine temporel	$y(t) = x_1 * x_2(t) \Leftrightarrow Y(f) = X_1(f) \cdot X_2(f)$
Dualité	si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ alors $X(t) \Leftrightarrow x(-f)$
Produit de convolution dans le domaine fréquentiel	$y(t) = x_1 \cdot x_2(t) \Leftrightarrow Y(f) = X_1 * X_2(f)$

TABLE 6.2 – Transformée de Fourier de fonctions usuelles

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Fonction porte $x(t) = \pi_\tau(t)$	$X(f) = \tau \text{sinc}(\pi f \tau)$
Sinus cardinal $x(t) = \frac{1}{\tau} \text{sinc}(\pi \frac{t}{\tau})$	$X(f) = \Pi_{\frac{1}{\tau}}(f)$
Fonction triangle $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau} & \text{si } t < \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$X(f) = \tau \text{sinc}^2(\pi \frac{t}{\tau})$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Cosinus $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$
Sinus $\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$
Fonction signe $x(t) = \text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$X(f) = \frac{1}{j\pi f}$
Echelon de Heaviside $x(t) = u(t)$	$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$
$x(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$	$X(f) = \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$
$x(t) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t }$	$X(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$
$x(t) = \alpha^2 t e^{-\alpha t } u(t)$	$X(f) = \frac{\alpha^2}{(\alpha + j2\pi f)^2}$
$x(t) = e^{-\alpha t} \cos(2\pi f_0 t) u(t)$	$X(f) = \frac{\alpha + j2\pi f}{(\alpha + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$
$x(t) = e^{-\alpha t} \sin(2\pi f_0 t) u(t)$	$X(f) = \frac{2\pi f_0}{(\alpha + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$

6.9. En effet, en raison des propriétés de linéarité de la transformée de Fourier, la réponse $y(t)$ sera égale à celle-ci, mais pondérée par la fonction de transfert du système H . Cette propriété offre un moyen alternatif à la transformée de Laplace pour calculer la réponse d'un système linéaire.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)] = \mathcal{F}^{-1}[H(f)X(f)] \tag{6.14}$$

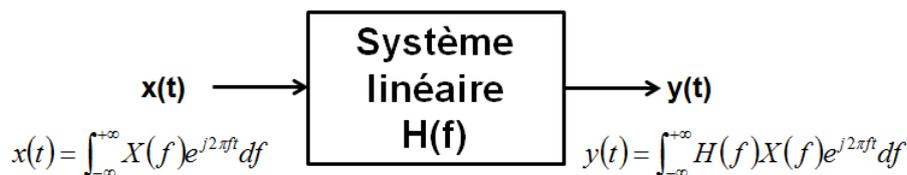


FIGURE 6.9 – Exemple de représentation du spectre de raies en amplitude (en haut) et en phase (en bas)

6.8 Exercices

Exercice 1 - Analyse de spectre

1. Soit le spectre du signal $s(t)$ à valeurs réels. Celui-ci n'est tracé que pour les fréquences positives ou nulles. Ce tracé est-il correct ?

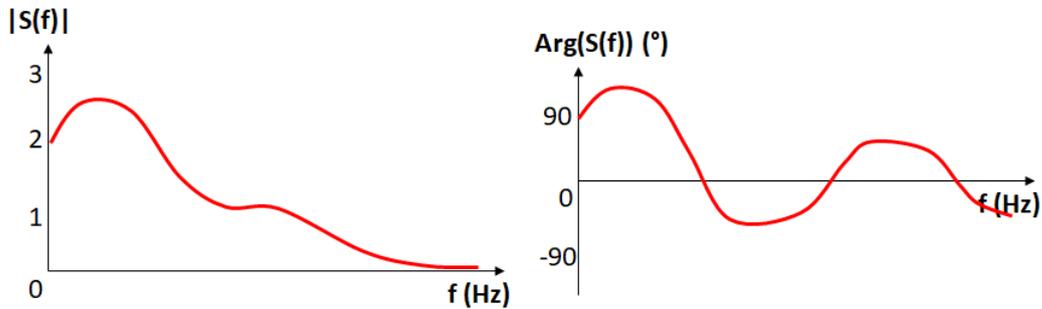


FIGURE 6.10 – Exercice 1-1

2. On considère un signal électrique correspondant à la superposition d'un signal sinusoïdal, de période égale à 50 ms, d'amplitude égale à 1 V, sans déphasage, et d'une fonction porte centrée, d'amplitude 2 V de largeur égale à 0.1 s. Le tracé ci-dessous est censé donner l'allure du module et de la phase de la transformée de ce signal. Est-il correct ? Si non, relevez l'ensemble des aberrations et refaites le tracé à partir des informations disponibles.

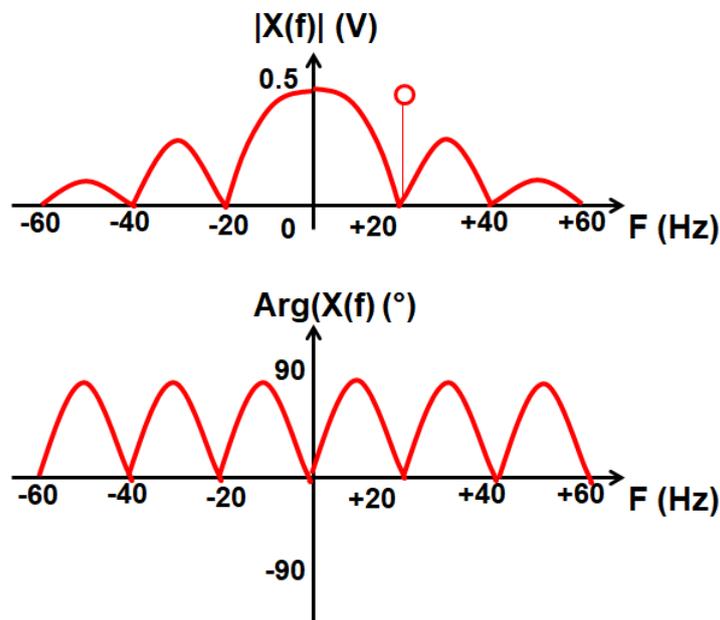


FIGURE 6.11 – Exercice 1-2

3. La figure ci-dessous présente le tracé de la partie réelle de la transformée de Fourier d'une fonction, uniquement pour les fréquences positives. De quelle(s) fonction(s) s'agit-il ?

Exercice 2

On considère le signal s_1 défini pour tout réel t par :

$$s_1(t) = e^{-at}u(t)$$

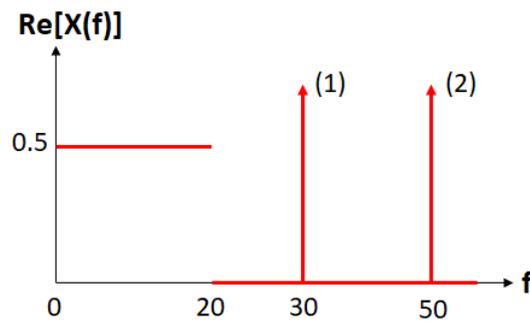


FIGURE 6.12 – Exercice 1-3

où $u(t)$ est la fonction échelon de Heaviside et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Tracez le graphe de s_1 . Déterminez sa transformée de Fourier S_1 .

2. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, déterminer après avoir tracé le graphe des signaux s_2 et s_3 :

a. la transformée de Fourier S_2 du signal s_2 défini pour tout réel t par $s_2(t) = e^{at}u(-t)$.

b. la transformée de Fourier S_3 du signal s_3 défini pour tout réel t par $s_3(t) = e^{-a|t|}$.

c. la transformée de Fourier S_4 du signal s_4 défini pour tout réel t par $s_4(t) = -e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$.

Exercice 3

Calculez les transformées de Fourier de signaux suivants :

a. $v(t) = \cos(2\pi f_0 t)\pi_{T_0}(t)$

b. $w(t) = \delta(t - T_e) + \delta(t) + \delta(t + T_e)$

c. $x(t) = \delta(t - 2T_e) + \delta(t) + \delta(t + 2T_e)$

d. $x(t) = te^{-at}u(t)$, $a > 0$

e. La fonction $y(t)$ décrite sur la figure 6.13.

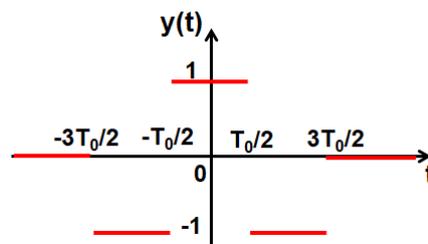


FIGURE 6.13 – Figure exercice 3

Exercice 4 - Signal numérique

On considère l'impulsion de forme trapézoïdale présentée sur la figure 6.14. Celle-ci constitue un modèle simplifié des signaux électriques numériques. Le signal correspond à une tension mesurée en volts.

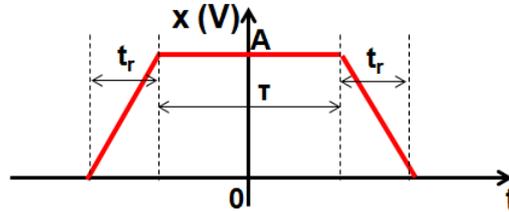


FIGURE 6.14 – Figure exercice 4

1. Tracez la dérivée de ce signal.
2. En utilisant la propriété de dérivation temporelle de la transformée de Fourier, calculez la transformée de Fourier du signal.
3. Esquissez l'allure de son spectre (module seulement). Précisez l'unité.
4. Calculez l'énergie de ce signal.
5. Le spectre est-il à bande limitée ? Quelle(s) paramètre(s) affectent l'occupation spectrale du signal ?

Exercice 5

Soit un filtre passe-bas RC, avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$. On envoie en entrée un signal $x(t) = e^{-10^3 t} u(t)$.

1. Etablir la fonction de transfert du filtre en fonction de la fréquence.
2. Calculez la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$.
3. Déterminez le spectre de la réponse du filtre.
4. Calculez la réponse du filtre dans le domaine temporel.



7. Analyse dans le domaine temporel

Jusque-là, nous avons principalement calculé la réponse de systèmes LTI en passant par le domaine fréquentiel, en utilisant les notions de fonctions de transfert, de transformée de Fourier et de Laplace. Cette approche permettait de calculer facilement cette réponse. Tous les calculs auraient pu être effectués en restant dans le domaine temporel à partir de la réponse impulsionnelle du système, que nous avons introduite au chapitre 2. Nous l'avons laissé de côté momentanément car son utilisation passait par un calcul relativement complexe, appelé produit de convolution. Nous allons le détailler dans ce chapitre. Nous pourrions croire que nous sommes en train de présenter un nouvel outil pour analyser l'effet d'un même système LTI. Nous allons voir au contraire que les concepts de fonction de transfert et de réponse impulsionnelle sont intimement liés.

À l'issue de ce chapitre, nous disposerons de l'ensemble des concepts pour discuter d'une limitation pratique majeure apportée par l'échantillonnage des signaux, indispensables lorsqu'un traitement numérique doit être apporté. Nous introduirons le théorème fondamental de l'échantillonnage, appelé théorème de Shannon-Nyquist, qui fixera la limite minimale de fréquence d'échantillonnage d'un signal afin de garantir sa reconstruction.

7.1 Réponse impulsionnelle

7.1.1 Définition

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il s'agit de la réponse d'un système LTI à une excitation impulsionnelle élémentaire, modélisée par une impulsion de Dirac. Sa connaissance permet de déterminer la réponse du système quelle que soit l'excitation appliquée à l'aide de la relation suivante, présentée au chapitre 2.

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x * h(t) \quad (7.1)$$

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système sont reliées par la transformée

de Laplace. Plusieurs moyens permettent de le démontrer. Le plus simple consiste à exploiter le lien entre la multiplication et le produit de convolution : un produit de convolution dans le domaine temporel est équivalent à une multiplication dans le domaine fréquentiel.

$$y(t) = h * x(t) \longleftrightarrow Y(p) = H(p) \cdot X(p) \quad (7.2)$$

Dans la prochaine partie, nous allons détailler les propriétés du produit de convolution et voir comment le mettre en œuvre pour résoudre l'équation 7.1.

7.1.2 Extraction de la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système peut s'obtenir de différentes manières. Expérimentalement, elle peut s'extraire en excitant le système par une impulsion élémentaire (tout du moins une forme s'en approchant). La réponse impulsionnelle sera directement la réponse du système. Une manière alternative est d'utiliser échelon unitaire $a(t)$, parfois plus simple à générer qu'une impulsion. La réponse impulsionnelle est ensuite déduite en dérivant de la réponse indicielle.

$$h(t) = \frac{da}{dt} \quad (7.3)$$

La réponse impulsionnelle peut aussi être déterminée à partir de la fonction de transfert. Dans le domaine de Laplace, nous avons vu que la réponse impulsionnelle est égale à la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert. De même, dans l'espace des fréquences, la réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert. Si l'expression de la fonction de transfert est disponible, on peut en déduire celle de la réponse impulsionnelle, à condition de savoir calculer sa transformée de Laplace ou Fourier inverse. Nous allons l'illustrer avec l'exemple suivant.

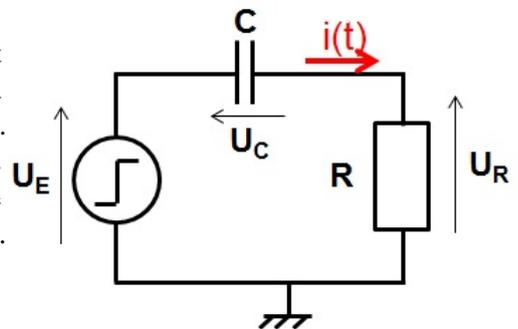
On reprend l'exemple du circuit RC (filtre passe-haut d'ordre 1) dans le chapitre 3, dont nous avons déterminé la fonction de transfert ($H(p)$) et la réponse $u_R(t)$ à un échelon. On considère qu'initialement le condensateur C n'est pas chargé. Nous allons vérifier qu'on retombe sur la même réponse impulsionnelle à partir de ces deux informations. La fonction de transfert du circuit est donnée par :

$$H(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC$$

On obtient la réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit à partir de la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert. On remarquera que le "p" au numérateur introduit un effet dérivateur. La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction nécessite de connaître la condition initiale. En $t = 0^+$, comme le condensateur est initialement déchargé, la tension aux bornes de la résistance est égale à l'excitation : $u_R(0^+) = \delta(t)$.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[p \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right] \implies h(t) = u_R(0^+) + \frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



A partir de la réponse à un échelon, en considérant un échelon unitaire qui démarre en $t = 0$, la réponse indicielle du circuit est donnée par : $a(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$. On en déduit la réponse impulsionnelle en dérivant la réponse indicielle.

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t))$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{du(t)}{dt} + \frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

Les deux approches nous donnent bien la même réponse.

7.2 Produit de convolution

7.2.1 Définition

Soient deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ définis sur l'ensemble $L^1(\mathbb{R})$. Leur produit de convolution est donné par l'équation 7.4.

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \quad (7.4)$$

7.2.2 Propriétés

Le tableau ci-dessous résume les principales propriétés du produit de convolution.

TABLE 7.1 – Propriétés du produit de convolution

Commutativité	$x * y(t) = y * x(t)$
Distributivité	$z * (x + y)(t) = z * x(t) + z * y(t)$
Associativité	$z * (x * y)(t) = (z * x) * y(t)$
Retournement temporel	$z(t) = x * y(t) \Rightarrow z(-t) = x * y(-t)$
Point de départ	Si $x(t)=0$ pour $t < t_{x0}$ et $y(t)=0$ pour $t < t_{y0}$, alors $z(t) = x * y(t) = 0$ pour $t < t_{x0} + t_{y0}$
Point final	Si $x(t)=0$ pour $t > t_{x1}$ et $y(t)=0$ pour $t > t_{y1}$, alors $z(t) = x * y(t) = 0$ pour $t > t_{x1} + t_{y1}$
Durée	Soit $x(t)$ et $y(t)$ de durées finies T_x et T_y . Si $z(t) = x * y(t)$, la durée du signal $z(t)$ est égale à $T_z = T_x + T_y$.

Une propriété importante est l'équivalence entre le produit de convolution dans le domaine temporel et la multiplication dans le domaine fréquentiel. Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux temporels, dont les transformées de Fourier sont $X(f)$ et $Y(f)$. La propriété précédente est donnée par (7.5). C'est cette propriété qui rend l'analyse fréquentielle intéressante dans l'étude des systèmes, puisque l'effet d'un système sur une excitation peut être déterminé par une simple multiplication, si les signaux sont exprimés dans le domaine fréquentiel.

$$x * y(t) \iff X(f) \cdot Y(f) \quad (7.5)$$

La réciproque existe : la multiplication entre deux signaux dans le domaine temporel est équivalente à un produit de convolution dans le domaine fréquentiel (7.6).

$$x \cdot y(t) \iff X * Y(f) \quad (7.6)$$

Une dernière propriété importante est liée à l'impulsion de Dirac. Celle-ci correspond à l'élément neutre du produit de convolution (l'équivalent d'une multiplication par 1), comme le montre 7.7. Cependant, si l'impulsion est décalée de t_0 , alors le résultat du produit de convolution sera aussi décalée de t_0 (7.8).

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (7.7)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (7.8)$$

Exemple :

Soit un filtre caractérisé par une réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est excité en entrée par le signal $x(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t - 1) - 4\delta(t - 2)$. Déterminez la réponse $y(t)$ de ce filtre.

En utilisant la propriété de distributivité du produit de convolution, on trouve facilement que la réponse du filtre est donnée par :

$$y(t) = 2h(t) + 3h(t - 1) - 4h(t - 2)$$

7.2.3 Mise en œuvre du produit de convolution

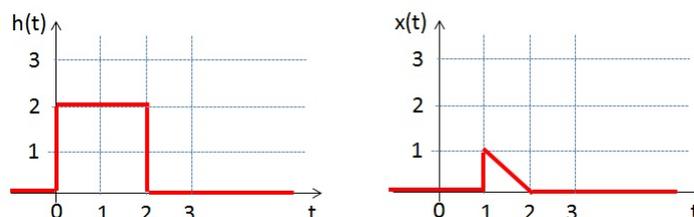
Dans cette partie, nous allons décrire une démarche permettant de calculer manuellement le résultat d'un produit de convolution. Nous considérons un système causal dont on connaît la réponse impulsionnelle $h(t)$ ainsi que l'excitation $x(t)$. On appelle $y(t)$ le résultat du produit de convolution. L'opération considérée s'écrit donc :

$$y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

Pour déterminer chaque point en un temps t_0 donné de la fonction $y(t)$, les différentes étapes à suivre sont les suivantes et sont illustrées à la figure 7.1 :

1. Changement de variable : on remplace t par τ .
2. On trace $h(\tau)$.
3. Pliage de la fonction $x(\tau)$ c'est-à-dire qu'on inverse l'axe temporel. On trace donc $x(-\tau)$.
4. Décalage de la fonction pliée : on décale de t_0 la fonction $x(-\tau)$ pour tracer la fonction $x(t_0 - \tau)$. Si $t_0 > 0$, alors la fonction $x(t_0 - \tau)$ est décalée vers la droite.
5. Multiplication terme à terme de $h(\tau)$ et $x(t_0 - \tau)$.
6. Intégration du produit sur \mathbb{R} . L'aire sous la courbe donne $y(t_0)$.

Cette suite d'opérations est répétée pour obtenir les valeurs de tous les points de $y(t)$.



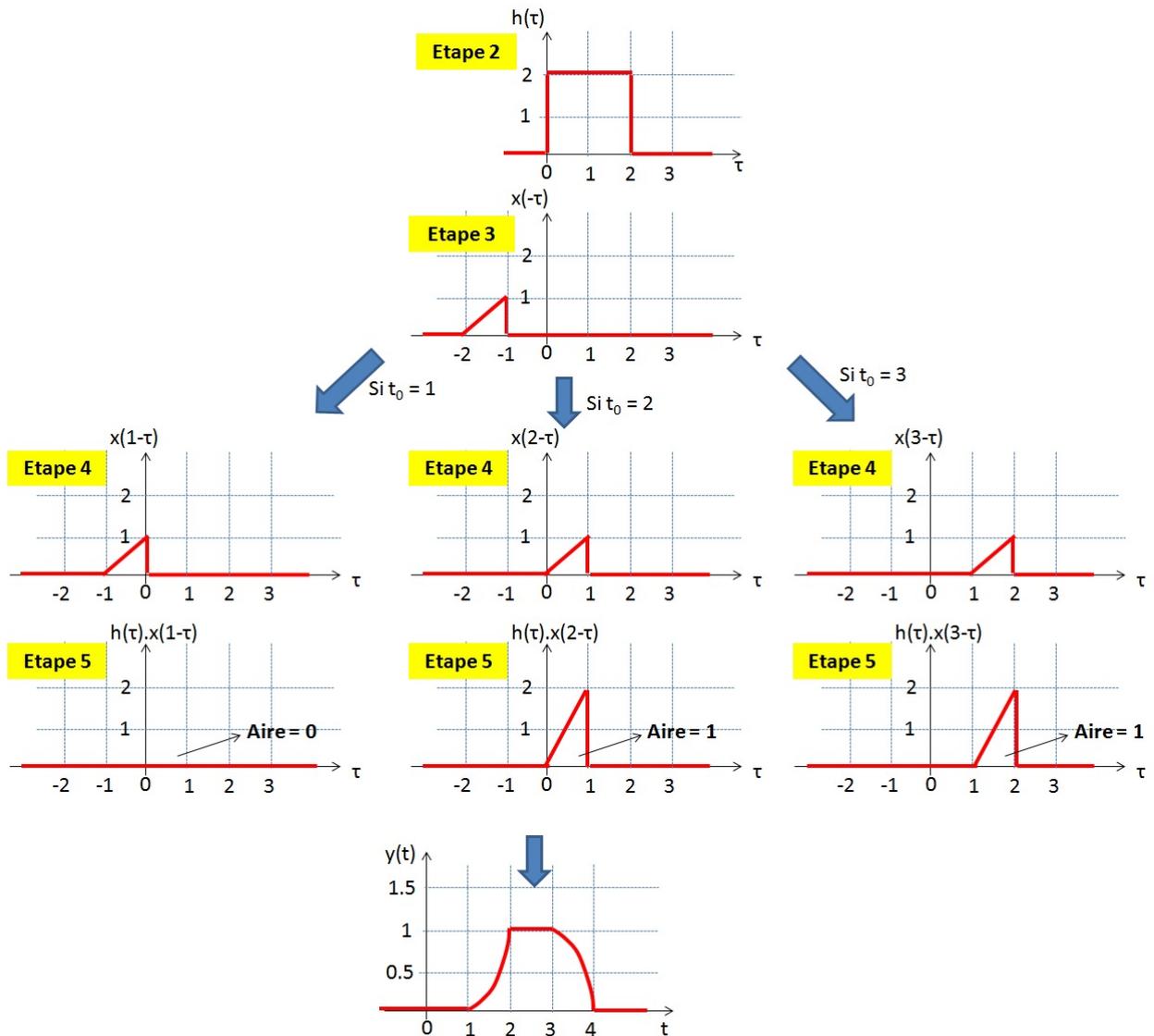


FIGURE 7.1 – Illustration de la mise en oeuvre d’un produit de convolution

7.2.4 Durée du produit de convolution

Dans l’exemple graphique ci-dessous, les signaux $h(t)$ et $x(t)$ sont de durées finies, respectivement égales à 2 et 1. On remarque que celle du résultat du produit de convolution l’est aussi, et sa durée est égale à 3. Ce résultat se comprend à partir de la formule du produit de convolution, mais aussi par l’analyse graphique du calcul. De manière générale, si on réalise le produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ de durées T_x et T_h , la durée T_y du résultat $y(t)$ du produit de convolution est donnée par 7.9. Si le signal $x(t)$ démarre en $T_{x_{min}}$ et s’arrête en $T_{x_{max}}$ et si le signal $h(t)$ démarre en $T_{h_{min}}$ et s’arrête en $T_{h_{max}}$, alors les bornes $T_{y_{min}}$ et $T_{y_{max}}$ du signal $y(t)$ sont données par 7.10.

$$T_y = T_h + T_x \tag{7.9}$$

$$T_{y_{min}} = T_{h_{min}} + T_{x_{min}} \quad T_{y_{max}} = T_{h_{max}} + T_{x_{max}} \tag{7.10}$$

7.3 Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle

On considère le filtre passe-bas ci-dessous (Fig. 7.2). La constante de temps RC du circuit est supposée être égale à 1, afin de simplifier les calculs. On suppose que le condensateur est initialement déchargé. On cherche la réponse temporelle $y(t)$ du circuit lorsqu'il est excité par le signal $x(t)$, présenté à la figure 7.3. Pour cela, nous allons mettre en œuvre le calcul du produit de convolution. Dans un premier temps, nous utiliserons la méthode graphique présentée ci-dessus. Dans un second temps, nous résoudrons directement l'intégrale 7.4.

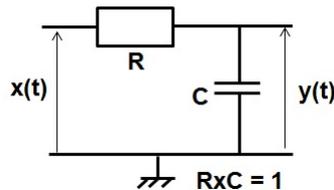


FIGURE 7.2 – Filtre passe-bas étudié

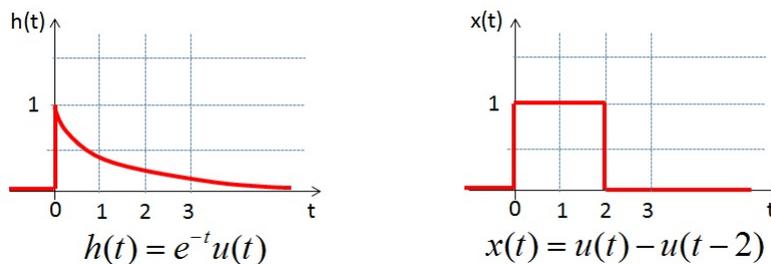


FIGURE 7.3 – Réponse impulsionnelle du circuit (à gauche) et excitation (à droite)

Il est d'abord nécessaire de calculer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit. Elle peut facilement être déduite de sa fonction de transfert $H(p)$.

$$H(p) = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \implies h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = e^{-t}u(t) \quad (7.11)$$

La réponse du filtre est obtenue en résolvant l'intégrale du produit de convolution ci-dessous.

$$y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad (7.12)$$

Méthode graphique :

Commençons par utiliser la méthode graphique présentée dans la partie précédente pour déterminer l'allure et l'expression de la réponse du circuit. Sur la figure 7.4, on a tracé la réponse impulsionnelle en fonction de τ , ainsi qu'une version pliée et décalée de t de l'excitation ($x(t - \tau)$).

Selon la valeur de t , l'intégrale du produit $h(\tau)x(t - \tau)$ prend des valeurs différentes. On distingue trois situations différentes :

1. si $t < 0$, alors $h(\tau)$ et $x(t - \tau)$ ne se recouvrent pas, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = 0$ si $t < 0$.
2. si $0 \leq t < 2$, seule une partie de $x(t - \tau)$ est recouvert par le début de $h(\tau)$. Le résultat du produit de convolution croît selon une exponentielle au fur et à mesure que t augmente. On a alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t - \tau)d\tau = 1 - e^{-t}$.

7.3 Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle

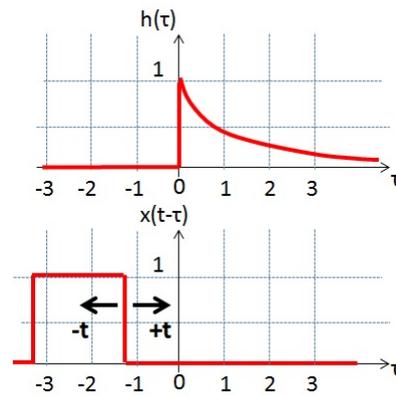


FIGURE 7.4 – Mise en œuvre graphique du produit de convolution pour le filtre passe-bas

3. si $t \geq 2$, alors $x(t - \tau)$ est complètement recouvert par $h(\tau)$. Le résultat du produit de convolution décroît exponentiellement quand t augmente. On a alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{t-2}^t h(\tau)x(t - \tau)d\tau = e^{-(t-2)} - e^{-t}$.

L'allure de la réponse du circuit est tracée sur la figure 7.5. Puisque la réponse impulsionnelle est à durée infinie, c'est aussi le cas pour la réponse du filtre. Comme la réponse impulsionnelle et l'excitation démarre en $t=0$, c'est encore le cas pour la réponse $y(t)$. Une expression peut aussi être déduite des résultats précédents :

$$y(t) = (1 - e^{-t})(u(t) - u(t - 2)) + (e^{-(t-2)} - e^{-t})u(t - 2) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2) \quad (7.13)$$

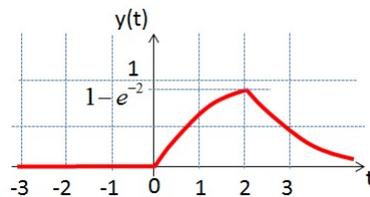


FIGURE 7.5 – Réponse du filtre passe-bas étudié

Calcul intégrale :

Dans un second temps, nous essayons de résoudre directement l'intégrale 7.12. En remplaçant $h(\tau)$ et $x(t - \tau)$ par leurs expressions respectives, on obtient :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau) \cdot (u(t - \tau) - u(t - (\tau - 2)))d\tau, t \in \mathbb{R}$$

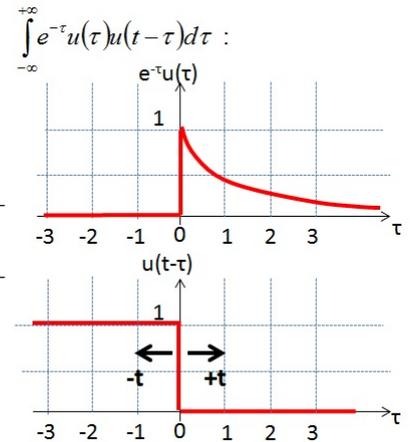
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-\tau}u(\tau)u(t - \tau) - e^{-\tau}u(\tau)u(t - (\tau - 2))]d\tau \quad (7.14)$$

Dans l'intégrale 7.14, on identifie deux termes. Calculons-les séparément.

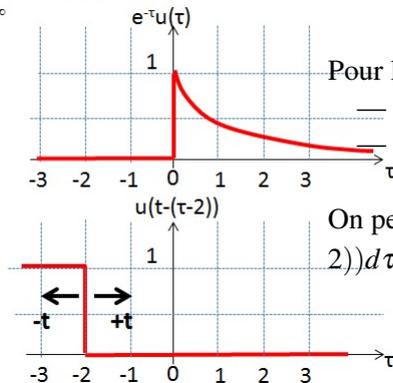
Concernant le premier terme, on trouve :

- Si $t < 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = 0$.
- Si $t \geq 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = 1 - e^{-t}$.

On peut donc déduire l'expression suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = (1 - e^{-t})u(t)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - (\tau - 2)) d\tau :$$



Pour le second terme, on trouve :

- Si $t < 2$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - (\tau - 2)) d\tau = 0$.
- Si $t \geq 2$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - (\tau - 2)) d\tau = \int_0^{t-2} e^{-\tau} u(\tau) u(t - (\tau - 2)) d\tau = 1 - e^{-(t-2)}$.

On peut donc déduire l'expression suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t - (\tau - 2)) d\tau = (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2)$

En combinant les deux résultats, on en déduit l'expression de la réponse, qui correspond à celle déterminée avec la méthode graphique.

$$y(t) = (1 - e^{-t})(u(t) - u(t - 2)) + (e^{-(t-2)} - e^{-t})u(t - 2) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2) \quad (7.15)$$

On peut vérifier la validité de ce résultat en calculant la réponse à partir de la transformée de Laplace. On commence par calculer celles de la réponse impulsionnelle (càd la fonction de transfert) et de l'excitation.

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{p+1} \quad (7.16)$$

$$X(p) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} \quad (7.17)$$

La réponse est ensuite obtenue en multipliant la fonction de transfert et l'excitation dans le domaine des fréquences complexes.

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-2p}}{p(p+1)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)(1 - e^{2p})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2)$$

7.4 Modélisation de l'échantillonnage - Théorème de Shannon-Nyquist

Ce cours est principalement consacré aux signaux à temps continu, qui représente la majorité des signaux physiques. Néanmoins, la numérisation des signaux, incontournables lors de l'analyse et le traitement par un moyen informatique, implique une discrétisation dans le temps de ce signal. Cette discrétisation a des conséquences importantes sur les caractéristiques du signal généré que l'on aimerait être le plus proche possible du signal original. Dis autrement, on souhaiterait pouvoir reconstituer le signal original à partir de sa version échantillonnée. De plus, on souhaiterait que les outils d'analyse du signal que nous avons vu dans ce cours (transformée de Fourier) puissent être appliqués aux signaux échantillonnés.

Toutes ces problématiques sont traitées en troisième année, où vous verrez notamment que la transformée de Fourier peut être étendue aux signaux discrets, moyennant certaines précautions. Néanmoins, à ce stade du cours, nous disposons de tous les concepts permettant l'analyse l'impact de l'échantillonnage sur le signal, et de déterminer les conditions nécessaires pour la reconstitution du signal. Le concept de peigne de Dirac va nous offrir un moyen simple de modéliser l'échantillonnage d'un signal. L'utilisation du produit de convolution va ensuite nous aider à analyser l'effet de l'échantillonnage sur le spectre du signal. Nous en déduisons une règle simple pour garantir la reconstitution du signal original à partir de sa version échantillonnée : celle-ci est donnée par le théorème de Shannon-Nyquist.

7.4.1 Modélisation de l'échantillonnage

L'échantillonnage d'un signal à temps continu (ou analogique) consiste à prélever régulièrement, périodiquement en général, des valeurs de ce signal. C'est l'opération préalable avant la numérisation du signal. Celle-ci étant basée sur des opérations arithmétiques et logiques effectuées par un circuit digital qui ne peuvent pas s'effectuer instantanément, la numérisation ne peut se faire sur un flot continu de données. Il est nécessaire que, pendant la durée de la numérisation, le signal appliqué en entrée du bloc de numérisation reste constant. La valeur appliquée est appelée échantillon. Elle est représentative de la valeur prise par le signal à un instant donné.

La figure 7.6 illustre le processus d'échantillonnage d'un signal analogique $x(t)$. L'échantillonnage est périodique, de période T_e . L'échantillonneur idéal peut être modélisé par un interrupteur commandé par un signal $c(t)$. Celui-ci ferme périodiquement l'interrupteur, pendant une durée courte τ , afin de "prélever" un échantillon du signal d'entrée, c'est-à-dire recopier sur la sortie $y(t)$ le signal d'entrée $x(t)$ pendant la durée τ .

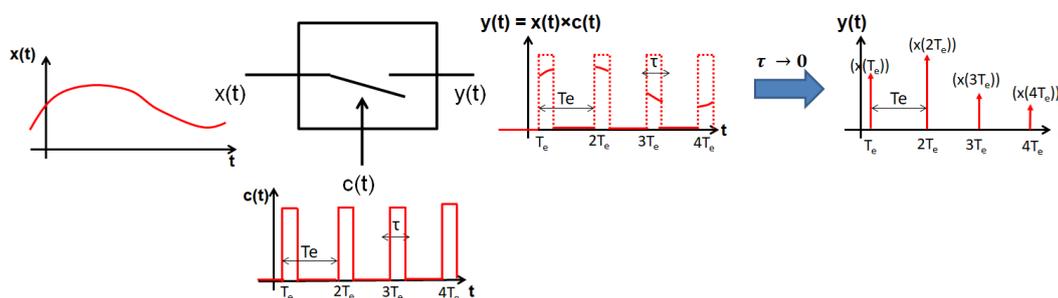


FIGURE 7.6 – Illustration de l'échantillonnage temporel

Dans le cas d'un échantillonneur idéal, la durée de prélèvement τ doit être la plus courte possible. En réduisant τ à une durée infinitésimale, on fait tendre la commande $c(t)$ vers une suite périodique d'impulsions de Dirac. Celle-ci, rencontrée dans le chapitre 5, s'appelle Peigne de Dirac $p_{gn}(t)$, donné par l'équation 7.18. L'indice k va permettre de repérer le numéro de l'échantillon

prélevé sur le signal d'entrée.

$$pgn(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (7.18)$$

L'effet du prélèvement de l'échantillon n°k peut être modélisé par la relation intégrale suivante. Pour conserver un simple produit, l'intégrale peut être approximée par la méthode rectangle, comme indiqué par le terme de droite de l'équation 7.19.

$$x(kT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT_e) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau x(t) \delta(t - kT_e) \quad (7.19)$$

Le signal en sortie de cet échantillonneur idéal peut alors être exprimé par l'équation 7.20.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} pgn(t) x(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (7.20)$$

Comme illustré dans la figure 7.6, le signal de sortie tend vers une suite d'impulsions périodiques de largeur infinitésimale, dont l'amplitude est liée à la valeur prise par le signal d'entrée au moment de l'échantillonnage. Entre chaque fermeture de l'interrupteur, l'information du signal d'entrée est "perdue" par le signal de sortie. On ne peut plus déterminer avec certitude l'évolution du signal entre les instants d'échantillonnage. Il devient légitime de se demander si cette perte est négligeable, dans le sens où nous serons en mesure de reconstituer sans erreurs aberrantes le signal original, ou bien si cette perte ne permettra plus de le reconstituer avec une précision acceptable. Cette question est notamment incontournable lorsqu'on applique un traitement numérique à un enregistrement sonore, par exemple pour éliminer un bruit. Le traitement numérique nécessite un échantillonnage préalable du signal sonore d'entrée (analogique). Une fois le traitement numérique appliqué, un nouveau signal sonore (analogique) devra être généré. Il est indispensable de garantir que l'échantillonnage n'aura pas d'effets significatifs sur la restitution du son.

Intuitivement, on perçoit que cette reconstitution pourra se faire avec une erreur réduite si la fréquence d'échantillonnage est plus grande que le rythme de variation du signal d'entrée. Pour satisfaire à cette condition générale, il est nécessaire que le signal d'entrée ait un spectre à bande limitée, c'est-à-dire que la majeure partie de l'énergie portée par le signal se situe en dessous d'une fréquence que nous noterons f_{max} . Mais comment quantifier cette limite basse de fréquence d'échantillonnage ? En déterminant le spectre du signal en sortie de l'échantillonneur, nous pourrions déterminer cette limite.

7.4.2 Impact de l'échantillonnage sur le spectre d'un signal

Intéressons-nous au spectre du signal $y(t)$ issu de l'échantillonnage d'un signal $x(t)$, dont le spectre est connu et à bande limitée par la fréquence f_{max} . Dans le chapitre précédent, nous avons indiqué que la transformée de Fourier du produit de deux signaux temporels était égale au produit de convolution de leur spectre (6.1). Ainsi, le spectre $Y(f)$ du signal $y(t)$ peut être exprimé à partir de ceux du signal d'entrée $X(f)$ et du peigne de Dirac $Pgn(f)$ (équation 7.21). Le résultat est illustré à la figure 7.7. Le résultat apparaît comme la répétition d'un nombre infini de réplique du spectre à bande limitée du signal original, avec une période $F_e = \frac{1}{T_e}$. Contrairement au signal original, le spectre du signal échantillonné n'est pas à bande limitée !

$$Y(f) = TF[\tau \cdot x(t) \cdot pgn(t)] = \tau X(f) * Pgn(f) = \frac{\tau}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{k}{T_e}) \quad (7.21)$$

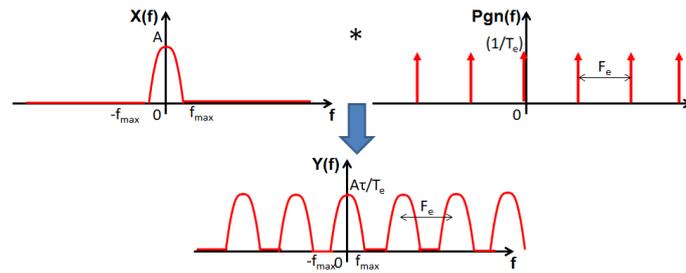


FIGURE 7.7 – Spectre d'un signal échantillonné

Il apparaît que le signal original et sa version échantillonnée présentent des spectres identiques seulement sur une plage fréquentielle donnée si une condition est respectée : que les différentes répliques du spectre initial ne se recoupent pas. Cette condition, donnée par le théorème de Shannon-Nyquist (voir prochaine partie), est respectée si $F_e \geq 2 \times f_{max}$. Dans ce cas, les spectres des signaux originaux et échantillonnés sont identiques sur la bande $[-\frac{F_e}{2}; +\frac{F_e}{2}]$. Cela a des conséquences majeures pour l'analyse fréquentielle des signaux. En pratique, l'analyse fréquentielle des signaux réels s'appuie sur un calcul numérique de la transformée de Fourier appliqué sur un signal échantillonné. On parle alors de transformée de Fourier discrète. Celle-ci ne pourra déterminer le spectre du signal que sur cet intervalle fondamental $[-\frac{F_e}{2}; +\frac{F_e}{2}]$, à condition de respecter le théorème de Shannon-Nyquist. Ces aspects seront abordés de manière plus rigoureuse l'an prochain.

7.4.3 Théorème de Shannon-Nyquist

Il est évident que le signal original ne peut être reconstruit à partir de sa version échantillonnée sans erreur. Cependant, la question est de savoir si, par un traitement adéquat, il est possible d'en reconstruire une version proche. Par traitement, on entend par exemple filtrage qui permet d'éliminer les composantes fréquentielles indésirables. En regardant de près le spectre du signal échantillonné (figure ??), cette opération semble possible puisque le spectre du signal original est toujours présent. L'ensemble des répliques de ce spectre à bande limitée représente les composantes fréquentielles à éliminer. Tant qu'il existe une séparation nette entre le spectre du signal original et ses multiples répliques, alors il est possible d'appliquer un filtre (en l'occurrence un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_{max}) pour ne conserver que la composante centrée sur 0 du spectre et extraire un signal proche du signal original. Ce principe est décrit à la figure 7.8 (a).

Cependant, il apparaît que certaines conditions sur la fréquence d'échantillonnage F_e et la fréquence maximal du signal original f_{max} doivent être réunies pour que les multiples répliques du spectre original soient séparables. On peut facilement déduire la condition donnée par l'équation 7.22. Cette relation correspond à l'énoncé du théorème de l'échantillonnage ou **théorème de Shannon-Nyquist** : il est possible de reconstituer le signal original, à bande limitée, à partir de sa version échantillonnée si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale composant le signal original.

$$F_e \geq 2 \times f_{max} \quad (7.22)$$

La figure 7.8 (b) illustre un cas où le théorème de Shannon-Nyquist n'est pas respecté. Il apparaît que les différentes répliques du spectre original se superposent les unes aux autres. Cet effet est appelé repliement de spectre. Le filtre passe-bas utilisé pour supprimer les répliques du spectre indésirables est appelé filtre anti-repliement pour éliminer leurs contributions. Si la

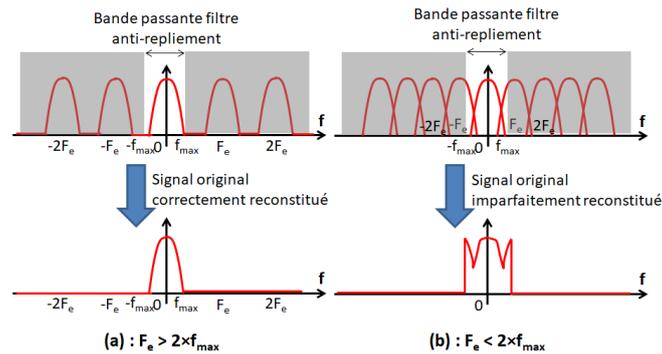


FIGURE 7.8 – Effet de la fréquence d'échantillonnage sur la reconstitution d'un signal à partir de sa version échantillonnée

condition donnée par l'équation 7.22 n'est pas respectée, l'application du filtre anti-repliement ne permet pas d'éliminer l'effet des répliques du spectre, conduisant à une version distordue du signal original. Pour les éliminer, il faudrait abaisser la fréquence de coupure du filtre en dessous de f_{\max} , ce qui éliminerait une partie du contenu fréquentiel du signal original.

Cette condition semble très simple à respecter puisqu'il suffit de dimensionner une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande. Dans la pratique, cela n'est pas forcément si trivial. L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage nécessite l'emploi de circuits intégrés plus rapides pour traiter le flot continu de données échantillonnées. L'augmentation de la fréquence de fonctionnement se traduit généralement par un surcoût et une consommation énergétique accrue.

Le théorème de Shannon-Nyquist constitue un théorème fondamental en traitement du signal puisqu'il donne les bonnes conditions d'acquisition du signal en vue de sa numérisation. Cette année, nous utiliserons des outils de calcul numérique (Matlab, Octave) durant les séances de travaux pratiques pour développer des scripts de calcul de transformée de Fourier notamment. Bien que nous raisonnions sur des signaux à temps continu, les signaux d'entrée des scripts de calcul seront des versions échantillonnées. Le choix de la fréquence d'échantillonnage devra respecter le théorème de Shannon-Nyquist pour garantir la justesse des résultats.

7.5 Exercices

Exercice 1

Déduire les réponses impulsionnelles des systèmes décrits par les fonctions ci-dessous :

- $G(p) = \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^4}{p+2} - \frac{1}{p} \right) e^{-2p}$
- $H(j\omega) = \frac{2j\omega}{2+j\omega}$
- $a(t) = t^2 u(t)$ où $a(t)$ est la réponse indicielle
- $a(t) = u(t)(2 - e^{-t})$ où $a(t)$ est la réponse indicielle

Exercice 2

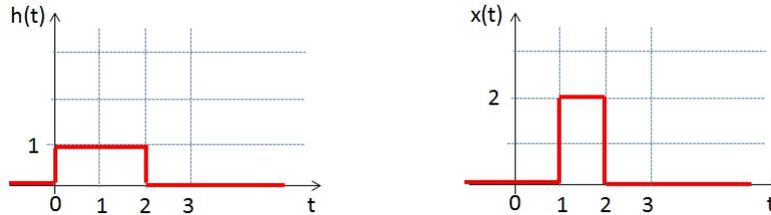
Calculez les produits de convolution suivants :

- $e(t) = u * u(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$
- $f(t) = \sin(t) * \Pi_{2a}(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$
- $g(t) = \cos(t) * \Pi_{2a}(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$
- $h(t) = \Pi_{2a}(t) * e^{-bt}$ avec $t \in \mathbb{R}$

e. $m(t) = (\delta(t-1) - \delta(t-2)) * (u(t+1) - u(t-1))$ avec $t \in \mathbb{R}$

Exercice 3

On considère les fonctions $h(t)$ et $x(t)$ dont le profil est représenté ci-dessous.



1. Proposez une expression mathématique pour ces deux fonctions.
2. On note $y(t)$ le résultat du produit de convolution de $x(t)$ et $h(t)$. Déterminez l'expression de $y(t)$ en calculant directement le produit de convolution. Tracez l'allure de cette fonction.
3. En utilisant la transformée de Laplace, vérifiez la validité du résultat précédent.
4. Même chose en utilisant la transformée de Fourier.

Exercice 4

On considère un filtre linéaire à temps invariant dont la fonction de transfert est donnée par $H(\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$.

1. On l'excite à l'aide d'un signal échelon. Calculez la réponse du filtre en utilisant sa réponse impulsionnelle. Esquissez sa forme temporelle.
2. Même question si on excite le filtre à partir du signal $e(t) = u(t) - u(t-2)$.

Exercice 5 - Convolution de spectre

On considère deux signaux, définis par les fonctions $f_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ et $f_2(t) = \cos(\omega_2 t)$.

1. Déterminez l'expression du spectre du signal $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ (on prendra $\omega_1 > \omega_2$). Représentez-le graphiquement.
2. Même chose avec $f_2(t) = \sin(\omega_2 t)$.
3. Même chose avec $f_2(t) = \text{sinc}(t)$.
4. Conclure sur l'effet de la multiplication par un signal sinusoïdal.

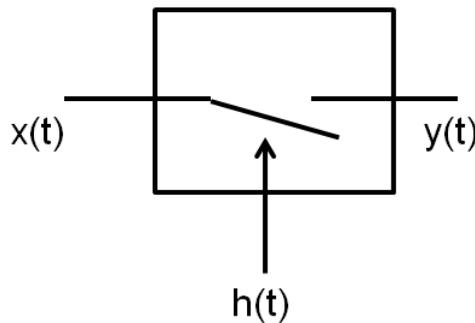
Exercice 6

On considère la fonction porte $\pi_{[-a;a]}(t) = \pi(t)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Calculez le produit de convolution $s(t) = \pi(t) * \pi(t)$.
 2. Calculez la transformée de Fourier $\Pi(f)$ de la fonction $\pi(t)$. En déduire l'expression de la transformée de Fourier $S(f)$ de la fonction $s(t)$.
 3. Soit le signal $l(t) = \pi(t) \cdot \pi(t)$. Calculez la transformée de Fourier $L(f)$ de la fonction $l(t)$.
- On pose $a = 0.5$. On considère $t \in (\mathbb{R})$.
4. Calculez le produit de convolution $p(t) = \pi(t) * \pi(\frac{t}{2})$.
 5. On considère les fonctions définies par $s_1(t) = \pi(\frac{t-1}{2})$ et $s_2(t) = s_1(t) - s_1(t-2)$. Tracez $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Calculez le produit de convolution entre s_1 et s_2 .

Exercice 7 - Échantillonnage

On considère le circuit de principe ci-dessous, formé d'un interrupteur idéal et appelé échantillonneur. $x(t)$ est le signal d'entrée, $h(t)$ le signal de commande d'ouverture/fermeture de l'interrupteur, et $y(t)$ le signal de sortie. L'interrupteur est ouvert lorsque la commande est nulle. Il se ferme lorsque la commande $h(t) = 1$. Dans cet exercice, on considère que la commande est formée par un peigne de Dirac de période T . Dans un premier temps, le signal d'entrée est une fonction sinus cardinal, tel que $x(t) = A \cdot \frac{\sin(\frac{\pi t}{\tau})}{\pi \frac{t}{\tau}}$.



1. Donnez la relation entre les signaux de sortie, d'entrée et de commande.
2. Tracez l'allure du signal de sortie. Le nom d'échantillonneur donné au circuit est-il justifié? Sa présence est-il nécessaire dans un circuit de traitement du signal?
3. Donnez les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $h(t)$? Esquissez leur spectre (en amplitude).
4. Déterminez la transformée de Fourier du signal $y(t)$. Esquissez son spectre dans le cas où $T \ll \tau$, puis dans le cas où $T > \tau$.
5. Est-il possible de retrouver le signal $x(t)$ à partir de l'acquisition du signal $y(t)$. Comment et sous quelles conditions?
6. Pourquoi est-il nécessaire de limiter la bande passante des signaux à échantillonner?



8. Aspects énergétiques et corrélation

Jusqu'ici, nous avons négligé les notions de puissance et l'énergie, qui sont des caractéristiques essentielles dans l'analyse des signaux. Elles ont un intérêt pratique dans de nombreux domaines d'ingénierie car elles quantifient le travail effectué par un système physique (que ce soit dans les systèmes électriques, mécaniques, de télécommunications ...). En traitement du signal, elles ont un intérêt supplémentaire. Dans de nombreux cas pratiques, on ne dispose pas de l'expression exacte de la transformée de Fourier d'un signal. Par contre on connaît la répartition de l'énergie ou de la puissance en fonction de la fréquence. Ces termes sont appelés densité spectrale en puissance ou en énergie. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'à partir de l'expression temporelle du signal, on peut toujours remonter à ces densités. Pour cela, nous allons introduire une nouvelle notion : la corrélation. Elle présente un autre intérêt pratique : la mesure du degré de ressemblance entre deux signaux.

Dans certains cas, que vous rencontrerez dans les cours de signaux aléatoires, les expressions exactes des signaux ne sont pas disponibles. Nous allons voir dans ce chapitre que la corrélation va nous permettre de déterminer la manière dont la puissance ou l'énergie est répartie dans le domaine fréquentiel. Ces notions nous permettront aussi de déterminer l'impact du système sur le transfert d'énergie ou de puissance.

8.1 Définitions de la puissance et de l'énergie d'un signal

Selon leur nature, les signaux transportent une énergie, que l'on peut quantifier soit sous la forme de puissance, soit sous la forme d'énergie. Nous allons préciser ici les définitions de ces grandeurs.

8.1.1 Puissance

La puissance correspond à la quantité d'énergie transportée par un signal pendant une unité de temps donnée. Celle-ci peut varier au cours du temps. On parle alors de puissance instantanée. Avant de préciser sa définition, considérons l'exemple d'un signal électrique, caractérisé par un courant ou par une tension. Soit une résistance R traversée par un courant $i(t)$, avec une tension $u(t)$

à ses bornes. La puissance instantanée $p(t)$ du signal, et fournie à la résistance, est donnée par 8.1.

$$p(t) = \frac{u(t)^2}{R} = Ri(t)^2 \quad (8.1)$$

On remarque que la puissance est obtenue en élevant au carré la grandeur physique formant le signal (ici, la tension ou le courant). La puissance est donc une grandeur quadratique. Dans le cas précédent, la puissance électrique dépend de la résistance électrique R . On pourrait s'affranchir de cette dernière en considérant une résistance unitaire, normalisant ainsi la puissance.

De manière générale, la puissance instantanée $p(t)$ d'un signal temporel quelconque défini par une fonction $f(t)$ est le carré de cette fonction (8.2). La puissance est définie en Joules/s, de manière plus courante, en Watts (W). Dans le cas d'un signal complexe, on doit considérer le module.

$$p(t) = f(t)^2 \quad (8.2)$$

$$p(t) = |f(t)|^2 \quad (8.3)$$

La puissance instantanée étant fluctuante dans le temps, d'autres manières de mesurer cette puissance sont souvent requises en pratique. On peut par exemple définir la puissance moyenne d'un signal \bar{P} à l'aide de 8.4. Ce n'est rien d'autre que la moyenne temporelle de la puissance instantanée.

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt \quad (8.4)$$

8.1.2 Energie

D'après la définition de la puissance, l'énergie transportée par un signal est liée à la puissance instantanée. L'énergie E transportée par un signal pendant une période délimitée par t_1 et t_2 est donnée par 8.5. Son unité est le Joule (J).

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \quad (8.5)$$

L'énergie totale du signal se calcule donc à l'aide de la relation 8.5, en l'intégrant sur tout le domaine de définition du signal.

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (8.6)$$

On peut aussi relier l'énergie totale à la puissance moyenne à l'aide de la relation suivante.

$$E_{tot} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{P} \cdot 2T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt \quad (8.7)$$

8.1.3 Signaux à énergie/puissance finie

Les signaux peuvent être classés en deux catégories en prenant comme critère leur énergie. Si l'équation 8.6 donnant l'énergie totale du signal converge, alors le signal est dit à énergie finie. C'est notamment le cas des signaux apériodiques et à supports temporels bornés. Ces signaux ont cependant une puissance moyenne qui tend vers zéro. Ils ne peuvent donc pas être caractérisés par leur puissance moyenne.

Si l'équation 8.6 ne converge pas, on ne peut pas caractériser le signal par son énergie totale. On utilise alors la puissance moyenne, qui sera toujours finie. On parle alors de signaux à puissance finie. C'est notamment le cas des signaux périodiques ou de signaux apériodiques à support temporel non borné (signaux aléatoires). Comme ils sont à support infini, leur énergie l'est aussi. Par contre, on retrouve la puissance moyenne sur une période T du signal, donnée par 8.8.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)^2 dt \quad (8.8)$$

8.2 Calcul de la puissance dans le domaine fréquentiel

Dans la partie précédente, nous avons défini la puissance d'un signal directement à partir de son expression dans le domaine temporel. Dans cette partie, nous allons voir comment les calculer à partir de l'expression du signal dans le domaine fréquentiel.

8.2.1 Densité spectrale d'amplitude

Revenons sur l'unité de l'amplitude ou module de la transformée de Fourier (ou spectre) d'un signal non périodique. S'il est périodique, le résultats de la transformée de Fourier est un spectre de raies ; l'unité de l'amplitude du spectre est la même que le signal. Le spectre indique alors directement la distribution de l'amplitude dans le domaine fréquentiel.

Ce n'est pas le cas pour un signal non périodique. Pour un signal $f(t)$, sa transformée de Fourier $F(f)$ lui est reliée par la transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df \quad (8.9)$$

Pour assurer l'homogénéité des unités, $F(f)$ ne peut pas avoir la même unité que $f(t)$, puisque $f(t)$ est le résultat de l'intégration du spectre sur un intervalle de fréquence. Le module de $F(f)$ est une densité spectrale en amplitude. Par exemple, si le signal $f(t)$ est une tension exprimée en V , le module de sa transformée de Fourier $|F(f)|$ représente une densité spectrale de tension exprimée en V/Hz (ou $V/rad.s^{-1}$ si on considère une pulsation au lieu d'une fréquence). Cette notion de densité spectrale d'amplitude se comprend : le spectre permet d'analyser la répartition de l'amplitude du signal dans le domaine fréquentiel. Déterminer l'amplitude du signal sur une plage de fréquence donnée revient à intégrer la transformée de Fourier du signal sur cet intervalle de fréquence. C'est ce qu'illustre la figure 8.1.

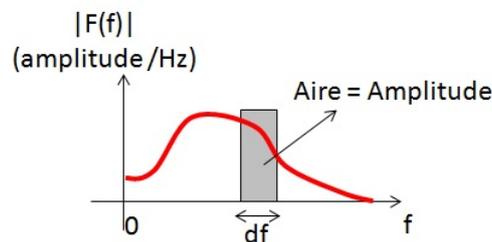


FIGURE 8.1 – Densité spectrale d'amplitude

8.2.2 Cas des signaux périodiques - Egalité de Parseval

On considère un signal périodique $f(t)$ de période T_0 avec $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Ce signal peut être décomposé en une série de Fourier, selon 8.10. L'ensemble des coefficients de Fourier $F(n)$ peuvent être

représentés sous la forme d'un spectre de raies d'amplitude, comme le montre la figure 8.2.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{jn2\pi f_0 t} \quad (8.10)$$

Chaque membre $f_n(t)$ de la série de Fourier transporte une partie de la puissance du signal. La puissance moyenne P_n de chacun de ces membres peut être reliée au coefficient de Fourier selon 8.11.

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f_n(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |F(n)|^2 dt \quad (8.11)$$

A partir de cette définition, une nouvelle représentation du spectre est possible : un spectre de puissance où chaque raie porte une puissance P_n . Celui-ci permet d'indiquer la répartition de la puissance dans le domaine spectral (figure 8.2).

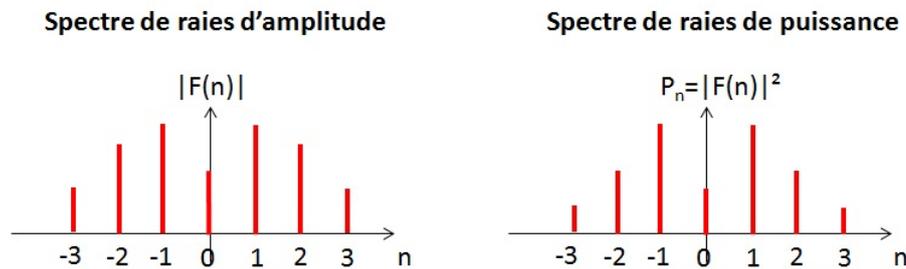


FIGURE 8.2 – Spectre de raies d'amplitude et de puissance pour un signal périodique

La puissance moyenne du signal peut aussi être exprimée en fonction des coefficients de Fourier : il s'agit de l'égalité de Parseval (pour un signal périodique), donnée par 8.12. La puissance moyenne est donc égale à la somme du module au carré de chaque coefficient du spectre. En d'autres termes, la puissance moyenne est la somme des différentes raies de puissance.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{T_0} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n)|^2 dt \\ \bar{P} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n)|^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

8.2.3 Cas des signaux non périodiques - Densité spectrale de puissance

Considérons un signal $f(t)$ quelconque. Le module de sa transformée de Fourier $|F(f)|$ représente une densité spectrale d'amplitude. Chaque portion du spectre transporte une partie de la puissance du signal. Pour caractériser la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel, on introduit la notion de densité spectrale de puissance du signal, notée $S_F(f)$, qui est le carré du module de la transformée de Fourier du signal (8.13). La densité spectrale de puissance est exprimée en W/Hz (ou en $W/rad.s^{-1}$).

$$S_F(f) = |F(f)|^2 = F(f) \cdot F(f)^* \quad (8.13)$$

A partir de cette définition, on remarque qu'intégrer la densité spectrale de puissance sur un intervalle de fréquence revient à calculer une puissance. Cependant, la notion de densité spectrale de puissance n'a de sens que pour les signaux à puissance finie, comme les fonctions périodiques

ou à support temporel non borné. Pour les signaux à énergie finie, il est préférable d'utiliser une répartition fréquentielle donnée en densité spectrale d'énergie.

Le théorème de Parseval peut être étendu au cas des signaux non périodiques. Dans le cas où le signal est à énergie finie, il permet de calculer l'énergie totale du signal à partir de sa densité spectrale d'énergie (8.14). En l'intégrant sur tout l'espace des fréquences, on détermine l'énergie totale du signal. Si le signal est à puissance finie, la puissance moyenne peut être calculée à partir de sa densité spectrale de puissance (8.15).

$$E_{tot} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (8.14)$$

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (8.15)$$

8.3 Corrélation

8.3.1 Définition

Comment comparer deux signaux ? Comment mesurer leur ressemblance ?

Une première tentative de définition d'une telle grandeur consiste à utiliser les outils dont nous disposons, par exemple le produit scalaire. Dans un premier temps, nous considérons des signaux bornés dans le temps sur un intervalle $[t_1; t_2]$. Ce produit correspond à la moyenne temporelle de la multiplication des deux signaux à comparer s_1 et s_2 , définie par la relation ci-dessous.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt$$

La figure 8.3 présente deux exemples permettant d'estimer l'intérêt de cette définition. A gauche, deux fonctions portes de même largeur apparaissent en même temps. La définition précédente renvoie une valeur maximale, indiquant une très grande ressemblance entre les deux signaux. A droite, on a décalé le signal s_2 par rapport s_1 . Ils se ressemblent autant que dans le cas précédent, seul un délai a été ajouté entre eux. Pourtant, l'indicateur de ressemblance utilisé renvoie une valeur nulle que nous interprétons comme une faible corrélation.

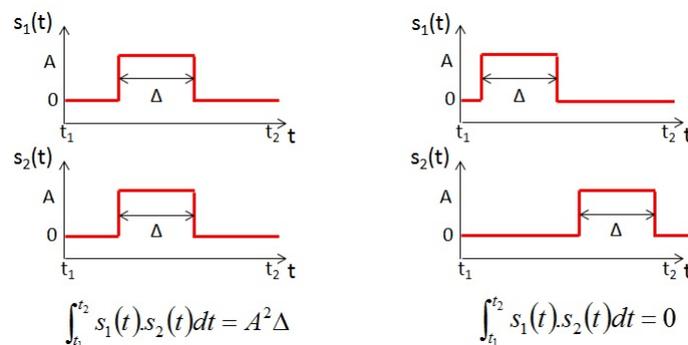


FIGURE 8.3 – Mesure du degré de "ressemblance" entre deux signaux par le produit scalaire

La définition choisie n'est pas satisfaisante car elle prend en compte la position relative des deux signaux. Une astuce consiste à refaire le même calcul, mais pour différentes positions relatives

entre les deux signaux, que nous noterons τ . L'expression est donnée par 8.16. L'indicateur calculé correspond à la corrélation $R(\tau)$ entre ces deux signaux. Il n'est pas à valeur unique puisqu'il dépend de τ . De manière générale, lorsqu'on travaille avec des signaux complexes, il est nécessaire de prendre le conjugué du signal s_2 . Dans le cas où le signal est à support temporel infini (signal à puissance finie), la relation prend la forme 8.17.

$$R(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt \quad (8.16)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt \quad (8.17)$$

Dans le cas où les fonctions sont périodiques et de même période T_0 , le calcul de la corrélation est donné par la relation ci-dessous.

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt \quad (8.18)$$

Lorsque les signaux sont à énergie finie, la division par T n'est pas indispensable, sinon la corrélation risque de tendre vers 0. La définition (8.19) est préférable.

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt \quad (8.19)$$

Reprenons l'exemple précédent et calculons la corrélation entre deux signaux pour vérifier la pertinence de cet indicateur. On décale la position respective du signal s_2 par rapport au signal s_1 . Pour chaque position, on calcule la corrélation. Le résultat est présenté sur la figure 8.4. La corrélation est maximale lorsque $\tau = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on superpose s_1 et s_2 . Dès que l'on décale s_2 vers la droite ou vers la gauche, la corrélation décroît jusqu'à devenir minimale lorsque les deux signaux ne se recouvrent plus. L'indicateur définit fournit une meilleure mesure du degré de ressemblance entre deux signaux.

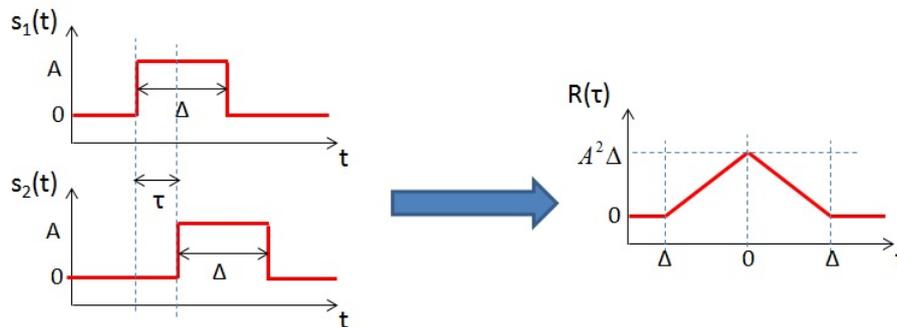


FIGURE 8.4 – Corrélation entre deux signaux

On remarque que le calcul de la corrélation est assez proche de celui du produit de convolution. En effet, dans les deux cas, il s'agit d'un calcul d'une intégrale appliqué à un produit de deux signaux que l'on décale. La seule différence est qu'on ne "retourne" pas un des deux signaux, comme le montre le rappel des deux formules ci-dessous.

<u>Produit de convolution</u>	<u>Corrélation</u>
$s_1 * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$	$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt$

On peut exprimer le calcul de la corrélation sous la forme d'un produit de convolution, comme le montre 8.20 :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt = s_1 * s_2(-\tau) \quad (8.20)$$

Si on analyse ce que représente la corrélation, on remarque qu'elle est équivalente à une puissance. En effet, il s'agit d'une grandeur quadratique. Nous verrons plus loin qu'elle est intimement liée à la puissance des signaux.

8.3.2 Autocorrélation et intercorrélation

Selon les signaux considérés dans le calcul de corrélation, on distinguera deux cas :

- si le calcul s'effectue sur le même signal ($s_1 = s_2$), on parlera d'autocorrélation que l'on notera $R_{11}(\tau)$
- si le calcul s'effectue sur deux signaux différents, on parlera d'intercorrélation que l'on notera $R_{12}(\tau)$.

L'autocorrélation permet de mesurer le degré de ressemblance d'un signal à une version décalée de lui-même. Comme nous allons le voir plus tard dans le cours, cela peut avoir de nombreuses applications comme la détection de composantes périodiques.

L'intercorrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux. Si deux signaux sont complètement décorrélés, alors leur intercorrélation restera minimale quelle que soit le décalage temporel que l'on applique entre ces deux signaux.

8.3.3 Propriétés de la corrélation

Changement de variable

On démontre que :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) f^*(t) dt \quad (8.21)$$

En effet, retarder la première fonction revient à avancer la seconde. Cette même propriété se retrouve pour la fonction d'intercorrélation.

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2^*(t) dt \quad (8.22)$$

Parité

La fonction d'autocorrélation est une fonction paire. En effet, on peut montrer que :

$$R_{11}^*(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) f(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t - \tau) f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt = R_{11}(\tau) \quad (8.23)$$

Par contre, ce n'est pas nécessairement le cas pour la fonction d'intercorrélation.

Valeur à l'origine

Lorsqu'on analyse la formule de l'autocorrélation à l'origine ($\tau = 0$), on retrouve la formule de la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie (8.4) ou celle de l'énergie totale pour les signaux à énergie finie (8.6). A partir du théorème de Parseval, on peut donner les valeurs à l'origine de la fonction d'autocorrélation :

- signal périodique : $R_{11}(0) = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n)|^2$
- signal non périodique à puissance finie : $R_{11}(0) = \bar{P} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$
- signal à énergie finie : $R_{11}(0) = E_{tot} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$

Valeur(s) maximale(s)

L'autocorrélation présente toujours un maximum à l'origine, pour $\tau = 0$, égale soit à la puissance moyenne, soit à l'énergie totale du signal. On en déduit donc la propriété suivante :

$$R_{11}(0) \geq R_{11}(\tau) \quad (8.24)$$

Ce n'est pas forcément le cas pour la fonction d'intercorrélation.

La fonction d'autocorrélation peut présenter des maxima en d'autres points d'abscisse, notamment lorsque le signal est périodique. Pour un signal de période T_0 , alors la fonction d'autocorrélation présente des maxima pour toutes les valeurs d'abscisse $\tau = k \cdot T_0$ où k est un nombre entier. Cette propriété fournit un des intérêts pratiques de la fonction d'autocorrélation et de son tracé : elle permet de repérer des composantes périodiques dans un signal complexe.

Cet outil d'analyse du signal est illustré dans les deux exemples ci-dessous.

Exemple 1 : bruit blanc

Par définition, un bruit est un signal aléatoire. Sa valeur à tout instant reste imprédictible. Selon la loi statistique suivie par ses valeurs, il peut être qualifié différemment : par exemple, on parle de bruit blanc gaussien si ses valeurs suivent une loi normale. Le qualificatif blanc vient de la répartition spectrale du signal, qui est quasiment constante quelle que soit la fréquence. Nous le comprendrons à la partie IV. Considérons un bruit blanc gaussien centré, c'est-à-dire de moyenne nulle. L'écart-type des valeurs prises par le signal est noté σ . Ce signal constitue un excellent modèle du bruit d'origine thermique affectant les composants électroniques et les récepteurs radio.

La figure ci-dessous présente un exemple de simulation d'un tel bruit, avec $\sigma = 0.5$: en haut, le relevé temporel ; en bas la fonction d'autocorrélation calculée. On remarque que la fonction d'autocorrélation est minimale pour toutes les valeurs de τ , sauf pour $\tau = 0$. L'amplitude de ce pic est égale à $\sigma^2 = 0.25$. Comme le signal est totalement aléatoire, comparer ce signal à une version décalée de lui-même revient à comparer deux signaux décorrélés. L'autocorrélation d'un tel signal peut être modélisée par une impulsion de Dirac.

Exemple 2 : extraction d'une composante périodique dans un signal bruité

Dans ce deuxième exemple, on considère un signal fortement affecté par un bruit blanc gaussien. Un relevé temporel de ce signal est présenté à la figure 8.6. Ce signal aléatoire semble contenir une composante périodique, de période proche de 20 ms. Sa présence est clairement révélée par le tracé de la fonction d'autocorrélation du signal. On retrouve un fort pic à l'origine, lié à la présence du bruit blanc gaussien. Mais on ne retrouve pas une fonction d'autocorrélation minimale pour $|\tau| > 0$. On observe des maxima locaux se répétant périodiquement, tous les $\tau = k \cdot 0.02$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce résultat confirme la présence d'une composante périodique de 20 ms cachée dans le signal.

Valeur minimale

Puisqu'on aborde la question de la valeur maximale, on pourrait s'interroger sur la valeur minimale prise par la fonction de corrélation. On atteint un minimum lorsque les deux fonctions à comparer ne présentent aucune corrélation. On serait tenté de penser que la valeur prise par la

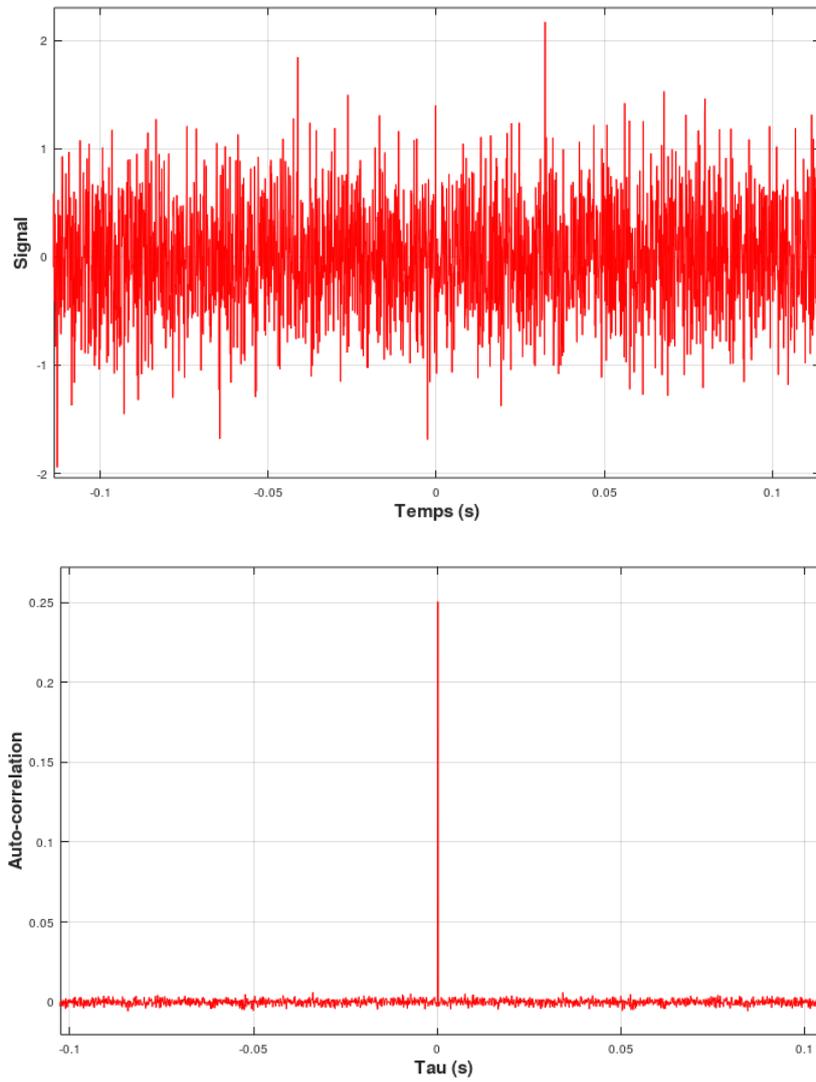
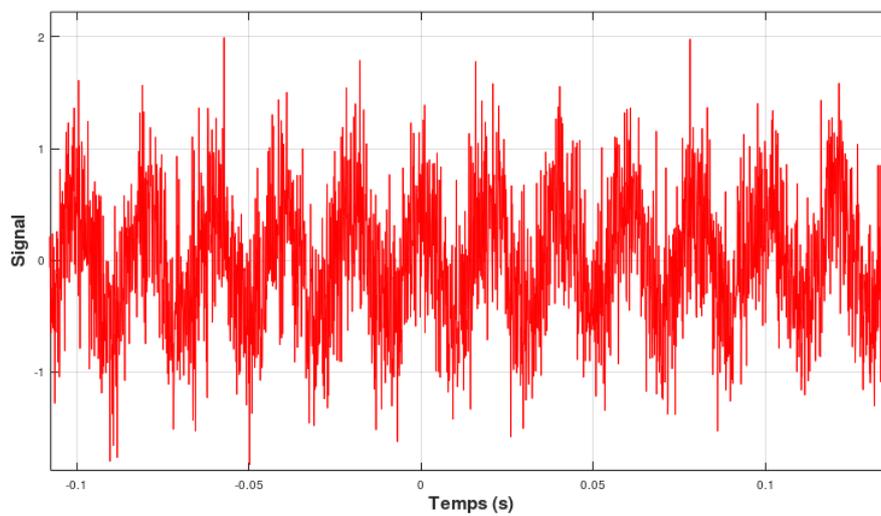


FIGURE 8.5 – Bruit blanc gaussien ($\sigma = 0.5$)(en haut) et sa fonction d'autocorrélation (en bas)



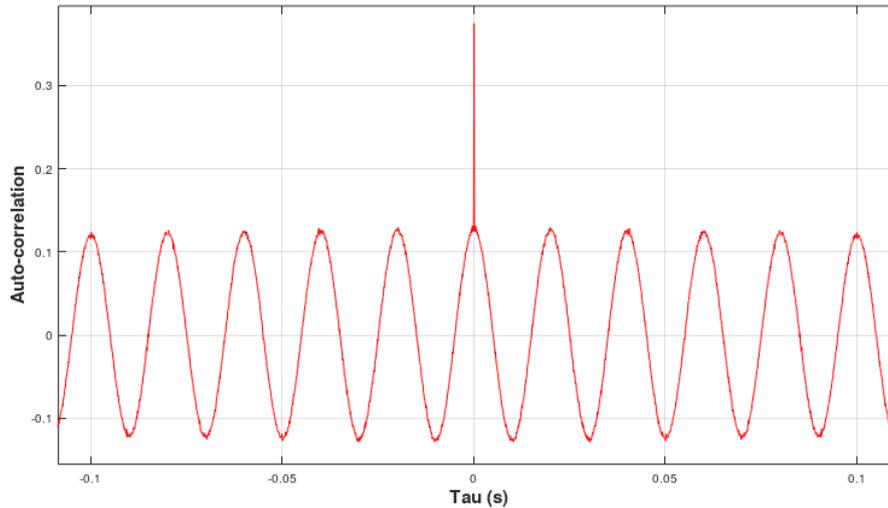


FIGURE 8.6 – Signal bruité (en haut) et analyse par son autocorrélation (en bas)

corrélation est nulle, mais ce n'est pas le cas. La fonction de corrélation dépend aussi des amplitudes et des valeurs moyennes prises par les signaux. Comparer les valeurs minimales et maximales de deux fonctions de corrélation, calculées sur des signaux différents, avec des amplitudes et moyennes différentes, n'a pas de sens. Cela n'indiquera pas qu'il y a plus de corrélation dans un cas que dans un autre.

8.3.4 Exemples

Exemple 1 : autocorrélation d'une fonction cosinusoidale

On considère le signal périodique $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$, où f_0 est la fréquence du signal et θ_0 sa phase initiale. Déterminez la fonction d'autocorrélation de ce signal et tracez son allure.

La fonction d'autocorrélation est obtenue en calculant l'intégrale 8.18. Celle-ci peut être résolue en utilisant la relation trigonométrique suivante : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos(2\pi f_0 (t - \tau) + \theta_0) dt, \text{ avec } T_0 = \frac{1}{f_0}$$

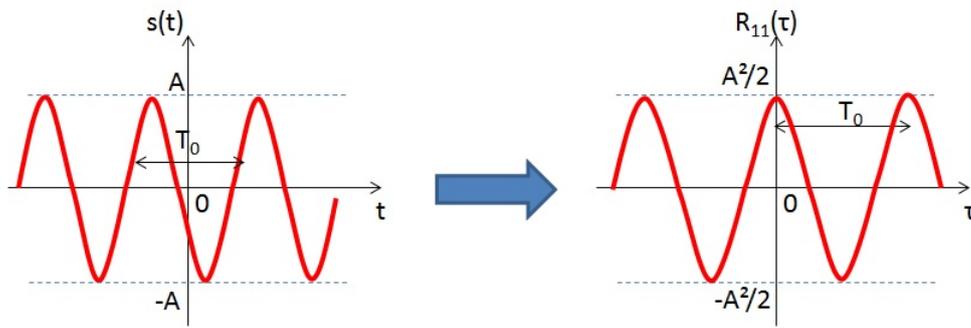
$$R_{11}(\tau) = \frac{A^2}{2T_0} \left[\int_0^{T_0} \cos(2\pi f_0 \tau) dt + \int_0^{T_0} \cos(2\pi f_0 (2t - \tau) + 2\theta_0) dt \right]$$

Le second terme de l'équation étant une fonction périodique de t , son intégration sur une période renvoie une valeur nulle. La relation précédente se simplifie :

$$R_{11}(\tau) = \frac{A^2}{2T_0} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_0^{T_0} dt = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

L'allure de la fonction d'autocorrélation est présentée ci-dessous. La fonction est paire et présente plusieurs maxima : un pour $\tau = 0$, mais aussi pour tous les multiples de la période T_0 du signal. Cela se comprend intuitivement : si on crée une réplique du signal que l'on décale d'un multiple de la période, lorsqu'on superpose le signal original et sa réplique, ceux-ci sont confondus.

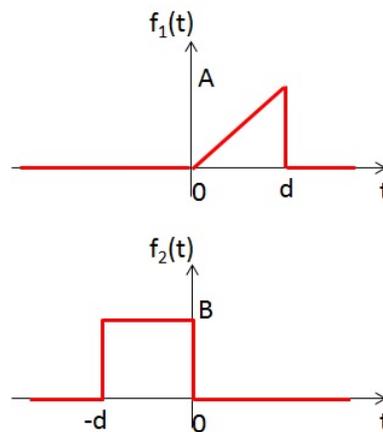
La puissance moyenne du signal est donnée par : $\bar{P} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) dt = \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} (1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0)) dt = \frac{A^2}{2}$. On vérifie ainsi que la valeur maximale prise par la fonction d'autocorrélation à l'origine est égale à la puissance moyenne du signal.



On peut aussi remarquer que l'effet de la phase du signal θ_0 a disparu dans la fonction d'autocorrélation. En effet, la fonction d'autocorrélation de ce signal est indépendante de la position initiale du signal (en d'autres termes, de l'origine des temps). Cet effet a une conséquence majeure : l'irréversibilité de la corrélation. A partir de la fonction d'autocorrélation, il est impossible de remonter au signal puisqu'à une fonction d'autocorrélation donnée, il n'y a pas un signal unique.

Exemple 2 : calcul d'intercorrélation

On considère les signaux $f_1(t)$ et $f_2(t)$ présentées ci-dessous. Déterminez la fonction d'intercorrélation de ces deux signaux.



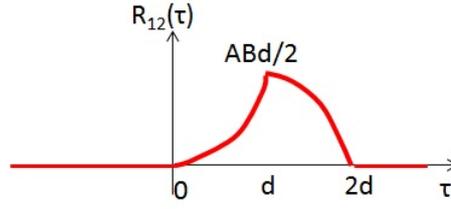
Les expressions des deux signaux sont : $f_1(t) = \frac{A}{d}(u(t) - u(t-d))$ et $f_2(t) = (u(t+d) - u(t))$. Leur produit d'intercorrélation est donné par :

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt$$

On peut distinguer les quatre intervalles suivants :

- si $\tau < 0$ ou $\tau > 2d$, alors les deux fonctions ne se recouvrent pas et $R_{12}(\tau) = 0$.
- si $0 \leq \tau < d$, $R_{12}(\tau) = \int_0^\tau \frac{AB}{d} t dt = \frac{AB}{2d} \tau^2$
- si $d \leq \tau < 2d$, $R_{12}(\tau) = \int_{\tau-d}^d \frac{AB}{d} t dt = \frac{AB}{2d} (d^2 - (\tau-d)^2)$

L'allure de la fonction d'intercorrélation est présentée sur la figure ci-dessous. Contrairement à la fonction d'autocorrélation, la fonction d'intercorrélation n'est pas paire et ne passe pas par un maximum à l'origine. Son maximum est atteint lorsqu'on décale le signal f_2 de $+d$ par rapport à f_1 .



8.4 Théorème de Wiener-Khintchine

Le théorème de Wiener-Khintchine relie la corrélation d'un signal avec sa densité spectrale de puissance. Il fait donc le lien entre une grandeur définie dans le domaine temporel et une autre dans le domaine fréquentiel. Celui-ci peut facilement être démontré en repartant de la formule de la corrélation. Considérons un signal $f(t)$ quelconque, dont l'autocorrélation est donnée par :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t-\tau)dt$$

On peut exprimer les signaux $f(t)$ et $f(t-\tau)^*$ à partir de leur spectre. En utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse, on peut montrer que :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$f(t-\tau)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)^* e^{j2\pi f(t-\tau)^*}df = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)^* e^{-j2\pi f(t-\tau)}df$$

En combinant ces différentes équations, on trouve :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi ft}df \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)^* e^{-j2\pi f(t-\tau)}df \right] dt$$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)F(f)^* e^{j2\pi f\tau}df \right] dt$$

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)F(f)^* e^{j2\pi f\tau}df \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt$$

Dans cette dernière expression, on peut remplacer le produit des spectres par la densité spectrale de puissance du signal $f(t)$. La relation 8.25 correspond au théorème de Wiener-Khintchine.

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)F(f)^* e^{j2\pi f\tau}df = R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad (8.25)$$

L'autocorrélation du signal $f(t)$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de sa densité spectrale de puissance S_F . Inversement, on peut affirmer que la densité spectrale de puissance du signal $f(t)$ est la transformée de Fourier de son autocorrélation, comme le montre l'équation 8.26.

$$S_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (8.26)$$

Cas d'un signal périodique

Si le signal est périodique de période T_0 et de fréquence $F_0 = \frac{1}{T_0}$, le théorème de Wiener-Khintchine est toujours exacte. On peut la réécrire en remplaçant la transformée de Fourier par la série de Fourier. Dans le cas d'une fonction périodique, la notion de densité spectrale de puissance n'a plus de raison d'être, puisque le spectre est constitué de raies portant chacune une partie de la puissance du signal. Le théorème de Wiener-Khintchine relie alors la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance $S_F(n)$ du signal. Ces grandeurs sont reliées par les équations 8.27 et 8.28, où n est l'indice d'une raie du spectre.

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_F(n) e^{jn2\pi F_0 \tau}, n \in \mathbb{Z} \quad (8.27)$$

$$S_F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_{11}(\tau) e^{jn2\pi F_0 \tau} d\tau, n \in \mathbb{Z} \quad (8.28)$$

Le théorème de Wiener-Khintchine présente un intérêt pratique fort dans la situation suivante. Si on ne dispose pas de l'expression exacte de l'évolution temporelle d'un signal $x(t)$, il est impossible de déterminer celle de sa transformée de Fourier $X(f)$. C'est notamment le cas lorsque l'on traite des signaux aléatoires. Cependant, si on dispose de l'expression de son autocorrélation, même si on ne peut déterminer la transformée de Fourier du signal, on peut déduire l'expression de la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ qui est reliée à l'amplitude du spectre du signal $|X(f)|$. L'information de phase du spectre est perdue donc il est impossible de reconstituer le signal temporel. Néanmoins, la densité spectrale de puissance peut être suffisante pour analyser le signal dans le domaine fréquentiel, en montrant comment l'énergie est répartie en fonction de la fréquence. A partir de cette information, un filtre peut être dimensionné pour modifier ou supprimer une partie du contenu fréquentiel du signal, jugée gênante.

Exemple 1 : spectre de puissance d'un signal cosinusoidal

Reprenons l'exemple du signal cosinusoidal $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ dont on a calculé l'autocorrélation précédemment. Calculez sa transformée de Fourier puis son spectre de puissance. En déduire la fonction d'autocorrélation.

La transformée de Fourier de la fonction $s(t)$ donne :

$$S(f) = \frac{A}{2} e^{j\theta_0} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\theta_0} \delta(f + f_0)$$

Son spectre de puissance est donc égale à :

$$S_F(f) = |S(f)|^2 = S(f) \cdot S(f)^* = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$$

On peut remarquer que la puissance moyenne du signal est bien égale à $\frac{A^2}{2}$.

L'autocorrélation du signal $s(t)$ peut être déduite du théorème de Wiener-Khintchine, à partir de la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance :

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(f) e^{j2\pi f \tau} df = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

On retrouve l'expression de la fonction d'autocorrélation déterminée dans la partie III.4.

Exemple 2 : densité spectrale de puissance d'un bruit blanc gaussien

Reprenons l'exemple du bruit blanc gaussien abordé dans la partie III.3. Sa fonction d'autocorrélation est assimilable à une impulsion de Dirac : $R_{bruit}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$. Comme ce signal est aléatoire, on ne peut pas définir son évolution temporelle par une fonction mathématique. Le calcul de sa transformée de Fourier est donc impossible. Cependant, puisqu'on dispose de sa fonction d'autocorrélation, on peut extraire sa densité spectrale de puissance à l'aide du théorème de Wiener-Khintchine.

$$S_{bruit}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{bruit}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (8.29)$$

$$S_{bruit}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \sigma^2 \quad (8.30)$$

La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac étant une fonction constante en fonction de la fréquence, le spectre d'un bruit blanc est constant quelle que soit la fréquence. On remarque que la puissance moyenne d'un tel signal est infinie et est donc irréalisable dans la pratique. Le bruit blanc que nous avons généré dans la partie III.3 n'est qu'un modèle, discret et à support temporel borné, dont l'énergie est forcément finie.

8.5 Relations entre le signal, la densité spectrale de puissance et l'autocorrélation

Les différentes relations que nous avons vu entre le signal $f(t)$, son spectre $F(f)$, sa densité spectrale de puissance $S_F(f)$ et son autocorrélation $R_{11}(\tau)$, peuvent être résumées sur la figure 8.7. Les flèches à double sens indiquent qu'à partir du spectre du signal, on peut retrouver l'expression du signal et inversement. Même chose pour l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance. Cependant, on observe deux flèches à sens unique. La première, entre le signal et son autocorrélation, indique qu'un signal présente une fonction d'autocorrélation unique mais l'inverse n'est pas vraie. La seconde indique qu'on ne peut pas retrouver le spectre d'un signal à partir de sa densité spectrale de puissance. En effet, l'information de phase a été perdue.

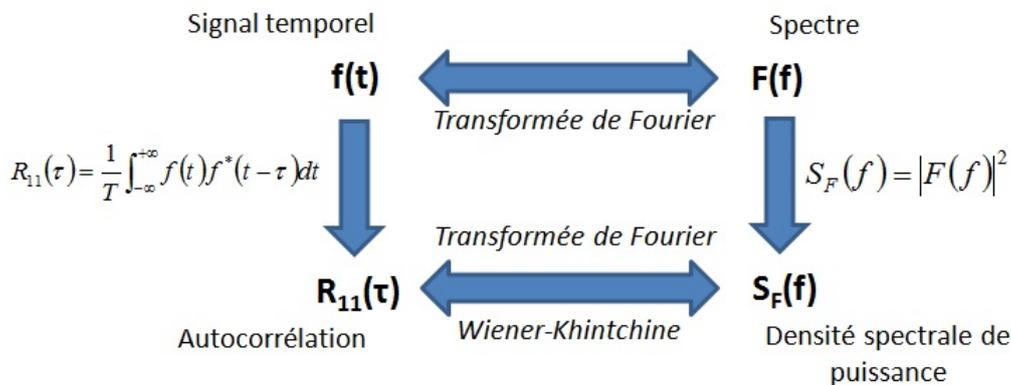


FIGURE 8.7 – Vue d'ensemble des relations entre le signal, son spectre, sa densité spectrale de puissance et son autocorrélation

8.6 Transfert d'énergie à travers un système linéaire

Avant de terminer ce chapitre, on cherche à savoir comment un système linéaire modifie la densité spectrale de puissance (ou d'énergie) d'un signal apportée sur son entrée. A partir du théorème de Wiener-Khintchine, on pourra aussi déterminer comme le système affecte sa fonction d'autocorrélation.

Prenons le système décrit sur la figure 8.8. On connaît sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa fonction de transfert $H(f)$. Un signal $x(t)$ est appliqué sur son entrée, dont on connaît la densité spectrale de puissance $S_X(f)$. On cherche à déterminer la densité spectrale de puissance $S_Y(f)$ du signal de sortie $y(t)$.

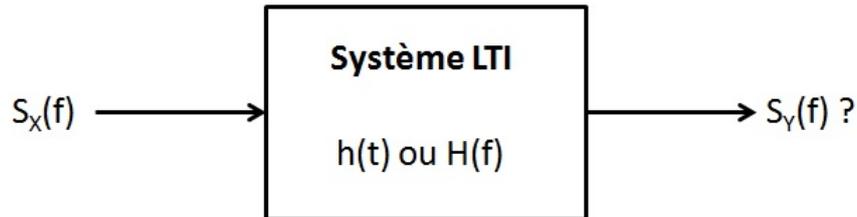


FIGURE 8.8 – Effet d'un système linéaire sur la densité spectrale de puissance appliquée sur son entrée

Le système étant linéaire, les spectres des signaux d'entrée et de sortie sont reliés par l'intermédiaire de la fonction de transfert. A partir de cette relation, on peut exprimer la densité spectrale de puissance de $y(t)$ à partir de celle de $x(t)$. On obtient la relation 8.31. Les densités spectrales de puissance en entrée et en sortie du système sont reliées par le carré du module de sa fonction de transfert.

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$S_Y(f) = H(f) \cdot H^*(f) \cdot |X(f)|^2 = |H(f)|^2 S_X(f) \quad (8.31)$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie $R_{YY}(\tau)$, connaissant celle du signal d'entrée $R_{XX}(\tau)$. Pour cela, on utilise le théorème de Wiener-Khintchine. En notant que la transformée de Fourier inverse d'un produit est un produit de convolution et que $H^*(f) = H(-f)$, on obtient la relation 8.32.

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_Y(f)) = \mathcal{F}^{-1}(H(f)H^*(f)S_X(f))$$

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(H(f)) * \mathcal{F}^{-1}(H^*(f)) * \mathcal{F}^{-1}(S_X(f))$$

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_{XX}(\tau) \quad (8.32)$$

8.7 Exercices

Exercice 1

Calculez la puissance moyenne et l'énergie totale des signaux suivants :

a. $\frac{1}{2} + \sin(4\pi t)$, $t \in \mathbb{R}$

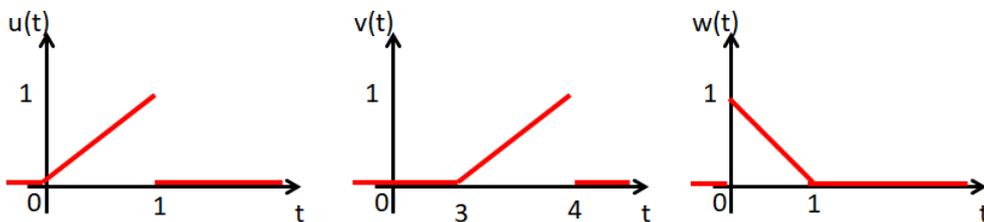
b. $\cos(\pi t)$, $t \in [0;3]$

c. $e^{-t}u(t)$, $t \in \mathbb{R}$

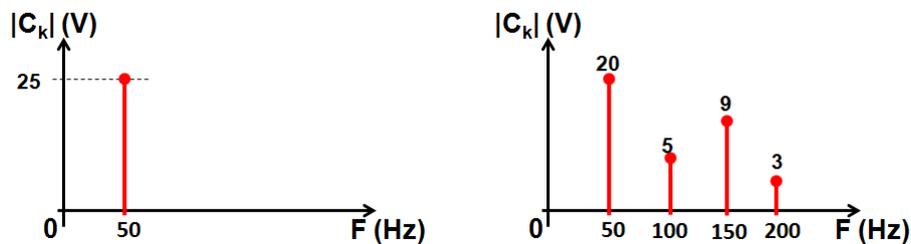
d. Une impulsion rectangulaire, d'amplitude pic-à-pic de 2 V, centrée en -1 V, d'une durée de 0.1 s et de période égale à 1 s.

Exercice 2

On considère les signaux $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$. Calculez et tracez la intercorrélation entre $u(t)$ et $v(t)$, puis $u(t)$ et $w(t)$.

**Exercice 3 - Distorsion harmonique**

On dispose du relevé d'un spectre d'amplitude de raies en sortie d'un système (figure ci-dessous à gauche). Le signal est à support temporel non borné.



1. Quelle est la nature du signal ? Précisez ses caractéristiques.
2. Quelle est la puissance moyenne du signal ?
3. Ce signal traverse un système. On relève le spectre en amplitude en sortie de ce système (figure ci-dessous à droite). Le système est-il linéaire ?
4. Calculez la puissance moyenne du signal en sortie du système.
5. On définit le taux de distorsion harmonique total (*Total Harmonic Distortion* (THD) en anglais) du signal par rapport au fondamental à l'aide de l'équation suivante :

$$THD_F = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{+\infty} A_i^2}}{A_1}$$

avec A_i l'amplitude de l'harmonique de rang i . Calculez ce taux sur les signaux d'entrée et de sortie du système.

Exercice 4

1. Soit le signal porte $x(t) = A \cdot \Pi_{\frac{b}{2}}(t)$, $b \in \mathbb{R}^*$.
 - a. Calculez l'énergie totale et la puissance moyenne du signal.
 - b. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal.
 - c. Calculez la densité spectrale de puissance ou d'énergie
2. La fonction $x(t)$ est répétée avec une période T pour former le signal $f(t)$. On prendra $b < \frac{T}{2}$.
 - a. Calculez l'énergie totale et la puissance moyenne du signal.
 - b. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal.
 - c. Calculez la densité spectrale de puissance ou d'énergie

Exercice 5

Un signal noté $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ excite un filtre passe-bas d'ordre 1, dont la fréquence de coupure est f_0 . Le signal en sortie du filtre est noté $y(t)$.

1. Donnez l'expression de la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$. Tracez son module et son argument.
2. Donnez l'expression de la fonction de transfert $H(f)$ du filtre. Tracez son module et son argument dans le diagramme de Bode. Quel est son gain et son déphasage en f_0 ?
3. A partir de $X(f)$ et $H(f)$, déterminez la transformée de Fourier $Y(f)$ du signal $y(t)$.
4. Déterminez l'expression du signal $y(t)$ à partir de $Y(f)$.
5. Calculez la puissance moyenne du signal d'entrée. En déduire celle du signal de sortie.

Exercice 6 - Détection de discontinuité

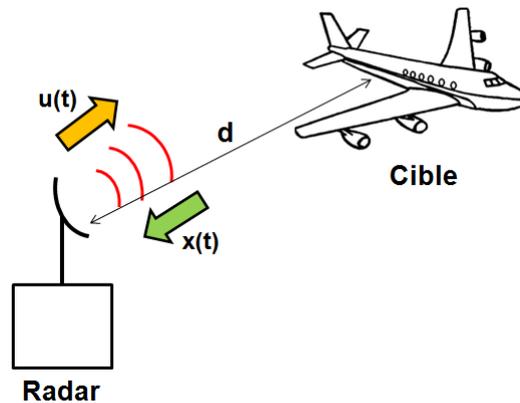
On considère un signal $x(t)$ avec plusieurs discontinuités, par exemple : $x(t) = u(t) - 2u(t - 4) + u(t - 6)$. On se propose de trouver une méthode basée sur un calcul d'intercorrélation pour détecter la position de ces discontinuités. On utilise comme signal de détection la fonction $y(t) = \sin(2\pi t)(u(t) - u(t - 1))$.

1. Esquissez l'allure des signaux $x(t)$ et $y(t)$.
2. Déterminez l'expression de l'intercorrélation $R_{xy}(\tau)$ entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$. Tracez son évolution temporelle. Les discontinuités sont-elles détectées ? Peut-on détecter leur polarité ?
3. On choisit un nouveau signal de détection : $y(t) = \sin(2\pi \frac{t}{8})(u(t) - u(t - 4))$. Reprendre la question précédente. Comment améliorer la précision de la détection ?
4. Le dispositif de détection est-il sensible au bruit ?

Exercice 7 - Radar

La figure ci-dessous illustre le principe de détection d'une cible par le traitement d'un écho radar, et l'estimation de sa distance.

Le radar transmet un signal connu, noté $u(t)$, qui se propage à une vitesse v . Son autocorrélation $R_u(\tau)$ est connu. Si un obstacle intercepte ce signal, il en réfléchit une partie. Celle-ci repart en arrière et atteint le radar un temps t_1 après son émission. Le radar mesure alors l'écho du signal $u(t)$, noté $x(t)$. Celui-ci est la superposition d'une version atténuée du signal $u(t)$ (on supposera l'atténuation constante et on la notera a) et d'un bruit $b(t)$, lié au bruit de mesure et aux interférences électromagnétiques externes.



1. Proposez une relation entre les signaux $x(t)$, $u(t)$ et $b(t)$.
2. Calculez le produit de convolution : $x(t) * u(-t)$.
3. Exprimez l'intercorrélation entre les signaux $u(t)$ et $x(t)$. Exprimez-la en fonction d'autres termes de corrélation.
4. Que devient cette expression si le signal de bruit est faiblement corrélé avec le signal $u(t)$?
5. Proposez une méthode d'estimation de la distance de la cible à partir de la mesure de l'écho du signal radar.
6. Quelles propriétés doit vérifier le signal $u(t)$ pour améliorer la précision de la détection ?

9. Annexe A - Rappels mathématiques

Le traitement du signal s'appuyant fortement sur les mathématiques, une bonne connaissance des concepts mathématiques est requise. Le but de cette annexe est de rappeler brièvement les principaux théorèmes/concepts sur lequel le cours de Signal et Filtrage s'appuie :

- Intégration et dérivation
- Trigonométrie
- Nombres complexes
- Exponentielle complexe

La maîtrise de ces concepts est indispensable pour les calculs de transformée (Laplace ou Fourier), de corrélation, de convolution, de puissance ... La lecture de cette annexe est donc fortement recommandée si vos souvenirs sur ces différents points se sont évaporés. Pour plus de détails, il est conseillé de se reporter aux cours de mathématiques de première année ou de se reporter sur des ouvrages spécialisés. L'annexe propose aussi quelques exercices d'entraînement, dont les corrections sont données sur la page moodle.insa-toulouse.fr. Des quizz d'auto-évaluation sont aussi proposés.

9.1 Intégration et dérivation

On ne considère ici que des cas de fonctions à une dimension. L'intégration et la dérivation correspondent à deux opérations linéaires réciproques. Le résultat de l'intégration est appelé intégrale, tandis que celui de la dérivation est nommé dérivée. Ci-dessous, nous rappelons les principales propriétés, les dérivées et les primitives des fonctions les plus usuelles.

9.1.1 Dérivée

La dérivée d'une fonction $f(t)$ est notée $f'(t) = df/dt$. Elle donne la pente ou la variation locale de la fonction en fonction d'une variation infinitésimale de l'argument x , comme l'indique l'équation 9.1. Si la relation précédente admet une limite finie, alors la fonction est dérivable au point $x = x_0$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (9.1)$$

Les principales propriétés résumées dans 9.1 :

TABLE 9.1 – Tableau récapitulatif des propriétés de l'intégration

Somme de fonctions	$(f + g)' = f' + g'$
Multiplication par une constante a	$(a \times f(x))' = a \times f'(x)$
Multiplication de fonctions	$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
Quotient de fonctions	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g(x)^2}$
Dérivée d'une fonction composée	$(f(g(x)))' = g'(x) \times f'(g(x))$

Le tableau ci-dessous liste les principales dérivées sur lesquelles nous nous appuyerons pour les calculs effectués dans ce cours.

TABLE 9.2 – Dérivées de fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$f(x) = \text{constante}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = a \text{ times } x$ où a est une constante	$f'(x) = a$
$f(x) = a \times x^n$	$f'(x) = a \times n \times x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

9.1.2 Primitives et intégrales

La primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est la fonction réciproque d'une dérivée. Ainsi, on peut noter : $F'(x) = f(x)$. Dans la pratique, la notion de primitive est associée à celle de l'intégrale d'une fonction. Celle-ci peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe de cette fonction (figure 9.1), entre deux bornes d'intégration x_0 et x_1 . La primitive de la fonction et son intégrale entre les bornes x_0 et x_1 sont reliés par l'équation 9.2.

$$F(x_1) - F(x_0) = [F(x)]_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \quad (9.2)$$

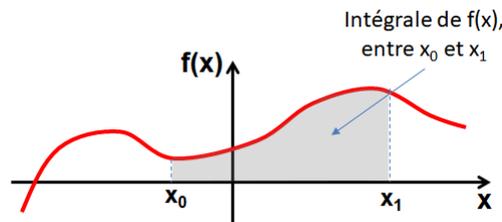


FIGURE 9.1 – Intégrale d'une fonction

L'intégrale peut être perçue comme la somme des aires de rectangles de largeur infinitésimale (notée ici dx), couvrant l'aire sous la courbe de la fonction. Si cette somme converge, alors la

fonction est intégrable au sens de Riemann et la somme tend vers la valeur de l'intégrale. Celle-ci existe si la fonction est continue entre les deux bornes d'intégration.

Puisque la dérivée de la primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est égale à cette fonction $f(x)$, une fonction présente une infinité de primitives qui se distinguent par une constante arbitraire. En effet, en dérivant ces primitives, cette constante disparaît. On ne peut donc pas définir une primitive unique à une fonction, sans information supplémentaire. Dans l'étude des systèmes et des signaux, on parlera de condition initiale qui nous permettra de fixer cette constante.

Les principales propriétés résumées dans le tableau 9.3 :

TABLE 9.3 – Tableau récapitulatif des propriétés de l'intégration

Intégrale d'une somme de fonctions	$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) + g(x))dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$
Multiplication par une constante a	$\int_{x_0}^{x_1} a \times f(x)dx = a \times \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$
Relation de Chasles	$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$
Inversion des bornes d'intégration	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx$
Signe de l'intégrale	<i>Si</i> $f(x) \geq 0$ (resp ≤ 0) <i>alors</i> $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \geq 0$ (resp ≤ 0)
Fonctions paires	<i>Si</i> $f(x)$ <i>paire</i> : $\int_{-x_0}^{x_0} f(x)dx = 2 \int_0^{x_0} f(x)dx$
Fonctions impaires	<i>Si</i> $f(x)$ <i>impaire</i> : $\int_{-x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$
Fonctions périodiques de période T	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0+T}^{x_1+T} f(x)dx$

Le tableau ci-dessous liste les principales primitives sur lesquelles nous nous appuyerons pour les calculs effectués dans ce cours. Dans le tableau ci-dessous, le symbole c correspond à une constante, qui pourra être déterminée à partir des conditions initiales du problème traité. Ce détail a son importance car une fonction a une infinité de primitives possibles.

TABLE 9.4 – Primitives de fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$f(x) = a$, où a est une constante	$F(x) = a \times x + c$
$f(x) = a \times x^n$	$F(x) = a \times \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + c$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x} + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$

Le tableau ci-dessous présente les primitives de différentes fonctions composées courantes. $g(x)$ est une fonction, plus simple, dont on connaît la dérivée $g'(x)$.

Lorsque la fonction à intégrer ne correspond pas à un des cas présentés dans les deux tableaux ci-dessus, il est conseillé de chercher à décomposer la fonction sous une forme différente, faisant apparaître des fonctions dont on peut plus facilement calculer la primitive. Par exemple, lorsqu'on rencontre des fractions rationnelles, il est conseillé de les transformer en somme de fractions plus simples. En présence de produits de fonctions trigonométriques, l'utilisation des relations trigonométriques permet de ramener la fonction à une somme de termes trigonométriques.

Dans le cas où aucune relation exacte ne peut être extraite, il reste le calcul numérique pour estimer, avec une plus ou moins grande précision, le résultat de l'intégrale. Dans le cas où la fonction à intégrer est un produit de deux fonctions plus simples, dont on connaît soit la primitive

TABLE 9.5 – Primitives de fonctions composées

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$f(x) = g'(x) \times g(x)$	$F(x) = \frac{g(x)^2}{2} + c$
$f(x) = g'(x) \times g(x)^n$	$F(x) = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)^2}$	$F(x) = \frac{1}{g(x)} + c$
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)^n}, n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{g(x)^{n-1}} + c$
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x) = \ln(g(x)) + c$
$f(x) = g'(x) \times \sin(g(x))$	$F(x) = -\cos(g(x)) + c$
$f(x) = g'(x) \times e^{g(x)}$	$F(x) = e^{g(x)} + c$
$f(x) = g'(x) \times \sin(g(x))$	$F(x) = -\cos(g(x)) + c$
$f(x) = g'(x) \times \cos(g(x))$	$F(x) = \sin(g(x)) + c$

soit la dérivée, il est possible de déterminer le résultat de l'intégrale par une intégration par partie (IPP). Soit une fonction $f(x)$ égale au produit entre :

- une fonction $u(x)$ dont on sait calculer la dérivée $u'(x)$
- une fonction $v'(x)$ dont on sait calculer la primitive $v(x)$

La formule de l'intégration par partie est donnée par l'équation 9.3. Celle-ci sera calculable si on sait calculer la primitive du terme $u'(x).v(x)$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u(x) \times v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u'(x) \times v(x)dx \quad (9.3)$$

9.2 Rappels de trigonométrie

Les fonctions trigonométriques (nous ne parlerons ici que des fonctions sinus et cosinus) forment une famille de fonctions majeure en traitement du signal. Comme nous l'avons vu le long de ce cours, elles forment la famille de fonctions de base pour développer la série de Fourier d'une fonction périodique, permettant par exemple son analyse harmonique. De manière générale, toutes les fonctions, périodiques ou non, peuvent se décomposer en une somme infinie de termes (co)sinusoïdaux (transformée de Fourier). Elles forment aussi un type d'excitation non modifié par l'effet d'un système linéaire à temps invariant, fournissant ainsi un cadre simplifié dans l'étude des systèmes LTI (fonction de transfert). L'étude du signal utilise largement le domaine fréquentiel, qui se base soit sur la décomposition des signaux en somme de signaux (co)sinusoïdaux, soit sur un signal (co)sinusoïdal comme excitation de base d'un système LTI.

Avant de lister les propriétés principales, il est intéressant de rappeler une représentation géométrique des fonctions cosinus et sinus : le cercle trigonométrique (figure 9.2), centré sur un repère $(O; \vec{x}; \vec{y})$ et de rayon unité. Soit un point P placé sur ce cercle, tel qu'il existe un angle θ exprimé en radian entre le vecteur \vec{x} et le vecteur \vec{OP} . Cet angle est croissant dans le sens direct ou sens inverse des aiguilles d'une montre. $\cos(\theta)$ représente la projection du vecteur \vec{OP} sur l'axe x (ou l'abscisse du point P dans le repère Oxy) tandis que $\sin(\theta)$ est la projection de \vec{OP} sur l'axe y (ou l'ordonnée du point P dans le repère Oxy).

Les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ ont des valeurs comprises entre -1 et +1 quelle que soit la valeur de x, avec une périodicité de 2π , comme le montre le tracé de ces deux fonctions. Le tableau 9.6 donne quelques valeurs remarquables prises par ces fonctions.

Les fonctions cosinus et sinus sont déphasées d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ et reliées par l'égalité suivante :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \quad (9.4)$$

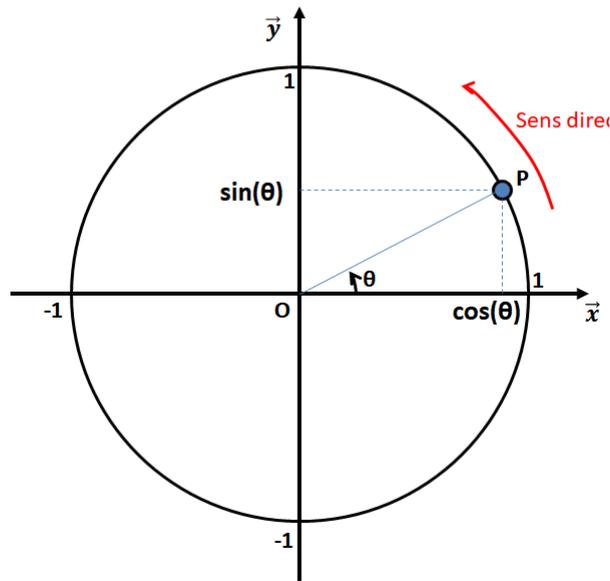


FIGURE 9.2 – Cercle trigonométrique

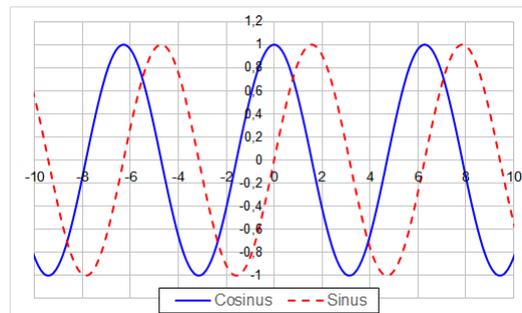


FIGURE 9.3 – Tracé des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$

TABLE 9.6 – Valeurs remarquables prises par les fonctions (co)sinusoïdales

Argument θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0

La fonction cosinus est paire, de sorte que : $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction sinus est impaire, de sorte que $\sin(-x) = -\sin(x)$. De plus, en raison de leur parité et du caractère périodique de ces

fonctions, les égalités suivantes existent :

$$\begin{aligned}
 \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
 \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\
 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)
 \end{aligned}
 \tag{9.5}$$

Les fonctions trigonométriques étant périodiques (de période 2π), l'intégrale de ces fonctions sur un nombre entier de périodes s'annule (l'aire sous la courbe lors des alternances positives compense celle lors des alternances négatives).

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_0+2k\pi} \cos(x) dx &= 0 \\
 \int_{x_0}^{x_0+2k\pi} \sin(x) dx &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.6}$$

La manipulation de ces fonctions repose sur plusieurs relations trigonométriques, qu'il est indispensable de connaître pour mettre en œuvre les intégrales appliquées sur les fonctions trigonométriques, situation courante lors de la décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier. Celles-ci permettent notamment de transformer le produit de deux fonctions trigonométriques en une somme de fonction trigonométrique. La liste ci-dessous récapitule les relations trigonométriques les plus courantes, valables pour tous réels a et b .

$$\begin{aligned}
 \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
 \cos(a - b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)
 \end{aligned}
 \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\
 \sin(a - b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
 \end{aligned}
 \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\
 \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)
 \end{aligned}
 \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \\
 \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \\
 \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{9.10}$$

Dans le cadre de l'étude des signaux temporels, l'argument $\theta(t)$ des fonctions $\cos(\theta(t))$ et $\sin(\theta(t))$ dépend du temps et prend une forme particulière :

$$\theta(t) = \omega t + \phi = 2\pi f t + \phi
 \tag{9.11}$$

où ω est la pulsation (en rad.s^{-1}) du signal, f sa fréquence (en Hz), ϕ le déphasage (en radian) défini par rapport à une référence de phase arbitraire. Ce dernier peut être considéré comme un retard par rapport au signal de référence (lui-même une fonction (co)sinusoïdale de même fréquence). Ce retard τ est donné par :

$$\tau = \frac{\phi}{\omega}
 \tag{9.12}$$

9.3 Nombres complexes

Les nombres complexes forment un ensemble, noté \mathbb{C} , contenant l'ensemble des réels et présentant les mêmes règles de calcul. Ils présentent la particularité d'être constituée de deux parties : parties réelles et imaginaires. Un nombre complexe z s'écrit ainsi sous la forme $z = x + iy$ où x et $y \in \mathbb{R}$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires. i est l'unité imaginaire, défini par $i = \sqrt{-1}$. Dans plusieurs domaines d'ingénierie (tels que l'électricité, l'électronique), le nombre imaginaire est noté j pour ne pas le confondre avec le symbole usuel du courant électrique. Nous utilisons cette convention dans ce cours.

Les nombres imaginaires sont apparus dès le XVI^e siècle pour les besoins de la résolution de polynôme d'ordre 2, 3 et 4. Pour faire apparaître des solutions non réelles, le nombre imaginaire "i" a été introduit, correspondant à la solution de l'équation $i^2 = -1$. Les nombres complexes s'appuient sur cette unité imaginaire.

9.3.1 Principales propriétés

Le tableau ci-dessous liste les principales propriétés à connaître pour manipuler les grandeurs complexes. On considère deux nombres complexes $z_1 = a_1 + jb_1$ et $z_2 = a_2 + jb_2$. Les propriétés liées aux exponentielles complexes seront données plus bas.

TABLE 9.7 – Tableau récapitulatif des propriétés des nombres complexes

Addition $z_3 = z_1 + z_2$	$z_3 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
Multiplication $z_3 = z_1 \times z_2$	$z_3 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
Inverse de j	$z_3 = \frac{1}{j} = -j$
Inverse d'un complexe $z_3 = \frac{1}{z_1}$	$z_3 = \frac{a_1 - jb_1}{a_1^2 + b_1^2}$
Conjugué	$z_1^* = a_1 - jb_1$
Conjugué d'une addition	$z_3^* = (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
Conjugué d'une multiplication	$z_3^* = (z_1 \times z_2)^* = z_1^* \times z_2^*$
Conjugué d'un inverse	$z_3^* = \left(\frac{1}{z_1}\right)^* = \frac{1}{z_1^*}$
Module	$ z_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
Argument	$Arg(z_1) = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$
Module d'une somme $ z_3 = z_1 + z_2 $	$ z_3 \neq z_1 + z_2 $
Module d'un produit $ z_3 = z_1 \times z_2 $	$ z_3 = z_1 \times z_2 $
Module d'une division $ z_3 = \left \frac{z_1}{z_2}\right $	$ z_3 = \frac{ z_1 }{ z_2 }$
Module d'une puissance $ z_3 = z_1^n $	$ z_3 = z_1 ^n$
Argument d'une somme $Arg(z_3) = Arg(z_1 + z_2)$	$Arg(z_3) \neq Arg(z_1) + Arg(z_2)$
Argument d'un produit $Arg(z_3) = Arg(z_1 \times z_2)$	$Arg(z_3) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$
Argument d'une division $Arg(z_3) = Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$	$Arg(z_3) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$
Argument d'une puissance $Arg(z_3) = Arg(z_1^n)$	$Arg(z_3) = n \times Arg(z_1)$

9.3.2 Interprétation géométrique

Une question s'est posée : comment représenter géométriquement ces nombres ? La représentation géométrique courante des nombres réels est une ligne infiniment longue. Ceux-ci se succèdent sur cette ligne que nous appelons axe des réels (Re). Manifestement, un nombre complexe ne peut pas être placé sur cet axe. La solution a consisté à créer une nouvelle ligne, orthogonale à l'axe de réels, pour placer les nombres imaginaires purs, de la forme $z = j * a$ avec $a \in \mathbb{R}$, que nous

appelons axe des imaginaires (Im). La représentation d'un nombre complexe, contenant une partie réelle et une partie imaginaire, est alors un point dans un plan à deux dimensions, appelé plan complexe. Cette représentation est conforme avec le fait que les nombres des réels ne sont qu'un sous-ensemble de l'ensemble des complexes, puisque l'axe des réels n'est qu'une partie du plan complexe (figure 9.4).

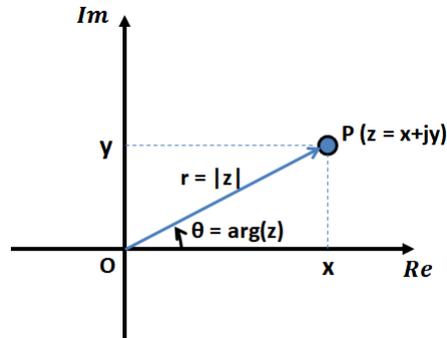


FIGURE 9.4 – Plan complexe et représentation géométrique d'un nombre complexe z

Une première représentation géométrique d'un nombre complexe $z = x + jy$ est de le considérer comme les coordonnées d'un point P dans un repère cartésien à deux dimensions : l'abscisse est donnée par la partie réelle x et l'ordonnée par la partie imaginaire y . Une autre interprétation possible est de considérer ce nombre complexe comme le vecteur \vec{OP} . Les parties réelles et imaginaires sont alors les projections de ce vecteur sur les axes des réels et des imaginaires. Ce vecteur présente une longueur ou un module $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sa direction est donnée par un angle ou argument $\theta = \arg(z) = \arctan(\frac{y}{x})$. Cette représentation n'est rien d'autre qu'une représentation en coordonnées polaires du point P . Le lien avec la représentation cartésienne est donné par :

$$\begin{aligned} x &= r \times \cos(\theta) \\ y &= r \times \sin(\theta) \end{aligned} \tag{9.13}$$

L'addition de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$, associés à deux points dans le plan complexe notés P_1 et P_2 , donne un nouveau nombre complexe $z_3 = x_3 + jy_3 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$. Celui-ci est associé à un point P_3 . Le vecteur \vec{OP}_3 est construit comme la somme des vecteurs OP_1 et OP_2 . La multiplication d'un nombre complexe par une constante réelle a conduit à une homothétie du vecteur associé d'un facteur a . La multiplication d'un nombre complexe $z = x + jy$ par l'unité imaginaire j peut être interprétée comme une rotation autour de l'origine O d'un angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, $j \times (x + jy) = -y + jx$ de sorte que parties réelles et imaginaires sont interverties, avec un changement de signe pour la partie imaginaire. La multiplication de deux nombres complexes quelconques est une superposition de ces trois transformations géométriques de base. L'interprétation géométrique de ces différentes opérations est illustrée à la figure 9.5. On pourrait ajouter aussi l'interprétation du conjugué d'un nombre complexe, qui est la symétrie par rapport à l'axe des réels.

9.4 Représentation complexe des signaux (co)sinusoïdaux : exponentielle complexe et phaseur

Dans ce cours, nous avons pu constater la place fondamentale que joue les signaux harmoniques, non seulement dans l'analyse des signaux, mais aussi dans l'étude des systèmes linéaires. En pratique, la manipulation des fonctions trigonométriques peut être compliquée. Une représentation

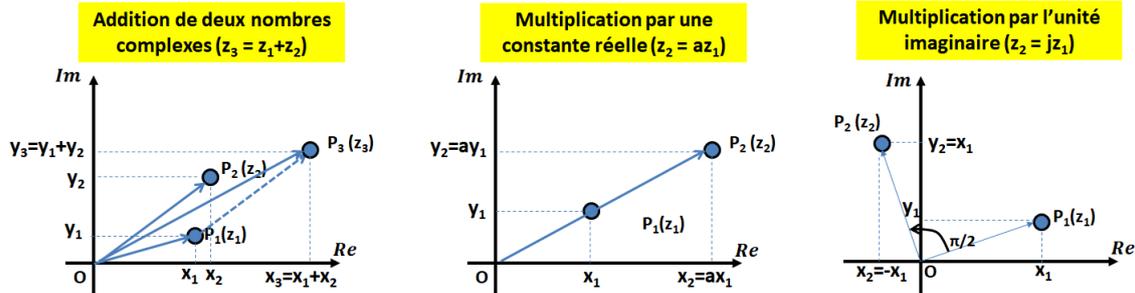


FIGURE 9.5 – Interprétation géométrique des opérations mathématiques élémentaires sur les nombres complexes.

alternative, plus compacte et simplifiant généralement les calculs, repose sur la représentation complexe d'un signal réel, vu alors comme un vecteur tournant dans un plan à deux dimensions. Une écriture compacte facilite les opérations sur les signaux sinusoidaux : la représentation exponentielle complexe. Une écriture plus compacte en découle, basée sur la notion de phaseurs.

9.4.1 Représentation complexe des signaux sinusoidaux et vecteur de Fresnel

Les signaux (co)sinusoidaux sont écrits de manière générale par la fonction suivante : $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, où A est l'amplitude, ω la pulsation et ϕ la phase initiale. La manipulation de signaux sinusoidaux (de même fréquence) par des systèmes linéaires nécessite de réaliser des opérations d'addition, de multiplication par des constantes, des intégrales ou des dérivées, s'avérant parfois lourdes d'un point de vue écriture. La représentation de cette fonction dans un plan complexe ou un diagramme de Fresnel peut faciliter ces opérations. Elle consiste à associer la fonction $x(t)$ à un vecteur $z(t)$ tournant à une vitesse angulaire ω constante dans un plan à deux dimensions. L'amplitude A correspond au module du vecteur, le terme $(\omega t + \phi)$ à l'argument instantané du vecteur. A noter que ϕ correspond à l'argument en $t = 0$ tandis que ωt est la partie dépendante du temps. L'avantage de cette représentation est que les opérations de deux fonctions sinusoidales (addition, dérivation, intégration) peuvent être considérés comme des associations de deux vecteurs pouvant s'interpréter géométriquement.

$$z(t) = x(t) + jy(t) = A\cos(\omega t + \phi) + jA\sin(\omega t + \phi) \tag{9.14}$$

On peut cependant être surpris de représenter une fonction $x(t)$ à valeurs réelles par une fonction $z(t)$ à valeurs complexes. Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'une astuce mathématique pour faciliter la manipulation des fonctions (co)sinusoidales. Tous les calculs se font avec la fonction à valeurs complexes mais au moment d'obtenir un résultat concret, puisqu'il faut revenir à une valeur réelle, il suffit d'extraire la partie réelle de la fonction complexe.

$$x(t) = \text{Re}[z(t)] \tag{9.15}$$

9.4.2 Exponentielle complexe

La formule d'Euler (équation 9.16) permet la représentation d'un nombre complexe sous la forme d'une exponentielle complexe.

$$e^{jx} = \cos(x) + j.\sin(x) \tag{9.16}$$

De plus, la formule d'Euler permet d'exprimer les fonctions trigonométriques à partir d'une exponentielle complexe, facilitant de nombreux calculs faisant intervenir des fonctions trigonométriques

en supprimant le recours aux relations trigonométriques.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \cos(x) &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{aligned} \quad (9.17)$$

Il existe plusieurs moyens de démontrer cette formule. Il peut être intéressant de la démontrer à l'aide de son interprétation géométrique. Celle-ci repose sur la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dz}{dt} = jz \quad (9.18)$$

où z est un nombre complexe dépendant du temps t . Nous prenons comme condition initiale $z(0) = 0$. Même s'il s'agit d'une grandeur complexe, la résolution de cette équation différentielle est similaire au cas d'une équation à valeurs réelles. Sa solution est donnée par :

$$z(t) = e^{jt}$$

On retrouve l'exponentielle complexe, avec comme argument t . Comment la relier aux fonctions trigonométriques ? Pour cela, interprétons géométriquement l'équation 9.18. $z(t)$ représente un vecteur dans le plan complexe de module unitaire, dont l'argument doit évoluer dans le temps. Le terme $\frac{dz}{dt}$ correspond au vecteur vitesse angulaire de $z(t)$. Celui-ci est égale à $j \cdot z(t)$, qui correspond à un vecteur perpendiculaire à $z(t)$ (puisqu'on a multiplié par j). Il donne la direction de déplacement de $z(t)$. Puisqu'il est toujours perpendiculaire à $z(t)$, il pointe dans une direction tangentielle, confirmant le mouvement de rotation du vecteur $z(t)$ autour de l'origine O . Le vecteur $jz(t)$ étant de module unitaire, la vitesse angulaire du vecteur $z(t)$ est constante et de 1 rad/s. $z(t)$ n'est rien d'autre qu'un vecteur de Fresnel, de module unitaire mais dont l'argument augmente dans le temps au rythme de 1 rad/s. Au bout d'un temps $t = 2\pi$, le vecteur sera revenu dans sa position initiale en $t = 0$. En projetant le vecteur $z(t)$ sur les axes réels et imaginaires, on retrouve la formule d'Euler :

$$z(t) = e^{jt} = \cos(t) + j \cdot \sin(t)$$

Le tableau 9.8 liste plusieurs valeurs complexes remarquables prises par la fonction exponentielle complexe en fonction de l'argument. Le tableau 9.9 rappelle quelques propriétés des opérations complexes, lorsque la représentation exponentielle complexe est utilisée. On note $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$.

TABLE 9.8 – Valeurs remarquables prises par l'exponentielle complexe

$e^{j\theta}$	Valeurs complexes
$e^{j \cdot 0}$	1
$e^{j \cdot \frac{\pi}{6}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}$
$e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}$
$e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}$	$\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$
$e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$	j
$e^{j \cdot \pi}$	-1
$e^{j \cdot \frac{3\pi}{2}}$	$-j$

TABLE 9.9 – Tableau récapitulatif des propriétés des exponentielles complexes

Produit $z_3 = z_1 \times z_2$	$z_3 = r_1 \times r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Inverse $z_3 = \frac{1}{z_1}$	$z_3 = \frac{1}{r_1} e^{-j\theta_1}$
Division $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$	$z_3 = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$
Puissance $z_3 = z_1^n$	$Arg(z_3) = r_1^n e^{j.n.\theta_1}$
Conjugué $z_3 = z_1^*$	$z_3 = r_1 e^{-j\theta_1}$

9.4.3 Phaseur

Le phaseur est une représentation complexe d'une fonction (co)sinusoidale, basée sur l'exponentielle complexe, dont l'amplitude et la phase ne dépendent pas du temps. La fréquence ou pulsation étant constante, le terme ωt est omis pour supprimer toute dépendance temporelle. L'intérêt pratique est de combiner de manière algébrique plusieurs fonctions (co)sinusoidales, sans avoir recours aux relations trigonométriques et faire disparaître le terme ωt des opérations.

La notion de phaseur découle directement de la formule d'Euler : une fonction cosinusoidale peut être représentée comme la partie réelle d'un terme exponentiel complexe (équation 9.19).

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[Ae^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Re}[Ae^{j\phi} e^{j\omega t}] \tag{9.19}$$

Le terme exponentielle complexe est décomposable en deux parties : le terme $e^{j\omega t}$ dépendant du temps, et le terme $Ae^{j\phi}$ indépendant du temps et renseignant sur l'amplitude et la phase du signal. Ce dernier terme est appelé amplitude complexe ou phaseur. Si la fréquence des signaux considérés est unique, le terme $e^{j\omega t}$ n'apporte pas d'informations supplémentaires. De plus, l'application de n'importe quelle opération linéaire ne modifiera pas la fréquence : le signal de sortie sera aussi un signal sinusoidale de même fréquence, mais son amplitude et sa phase seront affectées. Pour simplifier l'écriture, on peut omettre le terme $e^{j\omega t}$ et n'effectuer les opérations que sur le terme $Ae^{j\phi}$, que l'on appelle amplitude complexe ou phaseur. Pour distinguer le phaseur (où le terme $e^{j\omega t}$ est volontairement omis) de la fonction complexe où la dépendance temporelle apparaît, une convention veut que l'on ajoute le symbole "̂" pour indiquer que l'on parle du phaseur d'une fonction cosinusoidale. Cette convention est employée dans le chapitre 2. Par exemple, pour la fonction $x(t)$ de l'équation 9.19, le phaseur peut être noté de la manière suivante :

$$\hat{X} = Ae^{j\phi} \tag{9.20}$$

Exemples d'utilisation :

1. Multiplication par un scalaire complexe

Lorsqu'un système linéaire à temps invariant est excité par un signal (co)sinusoidale, noté $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, celui-ci n'affecte que l'amplitude et sa phase du signal d'entrée. La réponse est un signal (co)sinusoidale de même fréquence. Notons G_0 le gain du système et ϕ_0 le déphasage introduit par le système à la pulsation ω_0 . L'expression de la réponse $y(t)$ se détermine facilement :

$$y(t) = G_0.A \cos(\omega_0 t + \phi + \phi_0)$$

Cependant, aucune opération algébrique simple ne peut être utilisée pour établir cette expression, sauf en passant par une représentation complexe sous la forme d'un vecteur tournant. A la pulsation ω_0 , le signal d'entrée peut être modélisé par le phaseur $\hat{X} = Ae^{j\phi}$. L'effet du système linéaire peut être modélisé par une grandeur scalaire complexe $G = G_0 e^{j\phi_0}$. Le calcul de la réponse peut se

déterminer par une simple multiplication par le phaseur de l'excitation et le scalaire modélisant l'effet du système. Ainsi, on détermine d'abord le phaseur associé à la réponse :

$$\hat{Y} = G \times \hat{X} = G_0.Ae^{j(\phi+\phi_0)}$$

La réponse étant aussi un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 , la forme complexe complète de la réponse s'écrit $G_0.Ae^{j(\omega_0 t + \phi + \phi_0)}$. La forme réelle de la réponse peut être facilement calculée en extrayant la partie réelle :

$$y(t) = \text{Re}[G_0.Ae^{j(\phi+\phi_0)}] = G_0.A\cos(\omega_0 t + \phi + \phi_0)$$

2. Dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer un signal sinusoïdal ne présente pas de difficultés fondamentales. Mais les équations différentielles dans lesquelles les dérivées et les intégrales apparaissent peuvent être difficiles à calculer. L'utilisation de la représentation exponentielle complexe peut faciliter la tâche, en transformant une équation différentielle ordinaire en une équation algébrique. Cela est présenté dans les chapitres 2 et 3.

La dérivée du signal cosinusoidal $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ est donnée par $\frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2})$. Ce résultat se retrouve avec la représentation complexe $x(t) = \text{Re}[Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}]$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{Re}[Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}]) = \text{Re}[Aj\omega_0 e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = \text{Re}[A\omega_0 e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

Dériver un signal (co)sinusoïdal revient à le multiplier par $j\omega$ en représentation complexe. De même, la primitive du signal $x(t)$ est donnée par $X(t) = \frac{A}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \phi - \frac{\pi}{2})$. Ce résultat se retrouve avec la représentation complexe :

$$X(t) = \text{Re}[\frac{A}{j\omega_0}e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = \text{Re}[\frac{A}{\omega_0}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = \frac{A}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \phi - \frac{\pi}{2})$$

Intégrer un signal (co)sinusoïdal revient à le diviser par $j\omega$ en représentation complexe.

3. Somme de deux fonctions cosinusoidales de même fréquences

Soit deux signaux cosinusoidaux de même fréquence $x_1(t) = A_1\cos(\omega_0 t + \phi_1)$ et $x_2(t) = A_2\cos(\omega_0 t + \phi_2)$. On cherche à déterminer l'expression du signal $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$. L'addition étant une opération linéaire, le signal résultant est nécessairement sinusoïdal et de pulsation ω_0 . Il s'écrit $x_3(t) = A_3\cos(\omega_0 t + \phi_3)$. Déterminez les termes A_3 et ϕ_3 directement à l'aide de la forme réelle s'avère compliquée. Le passage par la représentation complexe et l'utilisation des phaseurs facilitent largement ce calcul. L'égalité suivante peut être écrite :

$$x_3(t) = \text{Re}[A_3e^{j\phi_3}e^{j\omega_0 t}] = \text{Re}[A_1e^{j\phi_1}e^{j\omega_0 t} + A_2e^{j\phi_2}e^{j\omega_0 t}] = \text{Re}[(A_1e^{j\phi_1} + A_2e^{j\phi_2})e^{j\omega_0 t}]$$

Commençons par déterminer l'expression de A_3 , en remarquant que $A_3 = |A_1e^{j\phi_1} + A_2e^{j\phi_2}|$:

$$A_3^2 = |A_1\cos(\phi_1) + jA_1\sin(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2) + jA_2\sin(\phi_2)|^2$$

$$A_3^2 = (A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2))^2 + (A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2))^2$$

$$A_3^2 = A_1^2\cos^2(\phi_1) + A_2^2\cos^2(\phi_2) + 2A_1A_2\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) + A_1^2\sin^2(\phi_1) + A_2^2\sin^2(\phi_2) + 2A_1A_2\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)$$

$$A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$$

On procède de la même manière pour déterminer l'expression de ϕ_3 :

$$\phi_3 = \arctan\left(\frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}\right)$$

9.5 Exercices d'entraînement

Exercice 1 - Dérivée

Dérivez les fonctions suivantes, en précisant les domaines où les fonctions sont dérivables.

a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

b. $g(x) = (-4x^2 + 4)(x^2 + x - 1)$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$

d. $k(x) = \sin(-2x^2 + 1)$

e. $m(x) = 4e^x + e^{j2x}$

f. $n(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Exercice 2 - Calcul d'intégrales

Intégrez les fonctions suivantes :

a. $\int_{-1}^3 (x^2 - 4x + 3) dx$

b. $\int_0^1 (6x^2 + 8)e^{x^3+4x} dx$

c. $\int_0^{2\pi} \cos(4x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

d. $\int_0^{2\pi} 4\cos(4x)\sin(4x) dx$

e. $\int_0^1 xe^x dx$

f. $\int_0^\pi x \cdot \sin(x) dx$

g. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cdot \cos(x) dx$

h. $\int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(x) dx$

Exercice 3 - Formules trigonométriques

- Exprimez $\cos(3x) + \sin(3x)$ en fonction des termes $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sin(x)$.
- Calculez la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(5\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(7\frac{\pi}{12}\right)$.
- Calculez la primitive de $f(x) = \cos^4(x)$.

Exercice 4 - Nombres complexes

Mettre sous la forme $a + jb$ les nombres complexes suivants :

a. $(4 + j)(3 - 2j)$

b. $\frac{1-j}{2+j}$

c. $(2 + j)\left(\frac{1+j}{2-2j}\right)^*$

d. $\frac{(-2+j)^2}{|4+3j|}$

Donnez le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$\text{e. } x = \frac{1+j}{1-j}$$

$$\text{f. } y = \left(\frac{(1-j)(1+j)}{4j}\right)^* \quad \text{g. } z = \left(\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}\right)^2$$

Exercice 5 - Exponentielles complexes

- Mettre sous la forme $a + jb$ le nombre complexe $e^{j\frac{\pi}{12}}$.
- Mettre sous la forme exponentielle complexe les nombres suivants : $1 + j\sqrt{3}$, $\frac{j}{1+j}$, $\frac{2}{(1-j)^3}$.
- Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + e^{j\theta}$, $z_2 = 1 - e^{j\theta}$ et $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$. Donnez l'expression de leurs modules et leurs arguments.

10. Annexe B - Algorithmes de calcul

Déterminer une expression exacte de la transformée de Fourier, du produit de convolution ou de la fonction d'autocorrélation de la plupart des fonctions mathématiques et des signaux physiques (donc à temps continu) s'avère une tâche compliquée voire impossible. Le recours au calcul numérique est alors indispensable pour estimer les valeurs de ces fonctions. Il faut bien noter que le calcul numérique ne permet pas de déterminer leurs valeurs exactes. Il offre seulement un moyen d'estimation qui, s'il est correctement configuré, convergera vers le résultat théorique avec une précision acceptable. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 7, le traitement numérique des signaux à temps continu requiert un échantillonnage, les transformant en signaux à temps discret. Celui-ci entraîne la perte d'une partie de l'information du signal et, si les conditions données par le théorème de Shannon-Nyquist ne sont pas respectées, compromet toute reconstitution du signal original. Si ce théorème est respecté, le spectre du signal pourra être calculé sans erreur, mais seulement sur une plage de fréquence bornée par la fréquence d'échantillonnage divisée par deux ! L'extension de la transformée de Fourier aux signaux discrets dépasse le cadre de ce cours et sera abordé l'an prochain. C'est pourquoi certaines conséquences de l'échantillonnage seront passées sous silence. Nous nous limiterons à fixer une fréquence d'échantillonnage conforme au théorème de Shannon-Nyquist.

Dans les travaux pratiques associés à ce cours, nous développerons des scripts de calcul dédiés à la décomposition en série de Fourier, au calcul de la transformée de Fourier, du produit de convolution et l'auto/intercorrélation. Les logiciels Matlab et Octave seront utilisés. Leurs principes de fonctionnement et la syntaxe des scripts ne seront pas décrits ici. Cette annexe donne les algorithmes généraux permettant de calculer numériquement ces différentes fonctions. Ils sont transposables dans n'importe quel autre langage de programmation (C, C++, Ada, Python, Java ...). La seule différence est que des outils comme Matlab ou Octave manipulent nativement des grandeurs complexes, ce qui n'est pas le cas dans la très grande majorité des langages de programmation. Cependant, des bibliothèques dédiées existent ou peuvent être développées. Les connaisseurs de Matlab pourront prétexter que des fonctions spécialisées sont déjà disponibles pour réaliser ces calculs. Néanmoins, à défaut d'être efficace, le développement d'un algorithme de calcul *from scratch* présente un intérêt pédagogique indéniable.

Avant de présenter ces différents algorithmes, il est indispensable de décrire la manière dont un signal, à temps continu et défini sur un support temporel potentiellement infini, peut être représenté par un signal discret formé d'un nombre fini de valeurs. Cette représentation est indispensable car liée aux principes de fonctionnement des systèmes numériques.

10.1 Représentation numérique d'un signal à temps continu

Le calcul numérique, effectué par un processeur dédié ou non, est réalisé à l'aide d'instructions arithmétiques et logiques élémentaires, nécessitant un temps minimum pour être mené à bien. Ce temps de calcul dépend des caractéristiques matérielles des processeurs et des algorithmes de calcul. En raison de leur vitesse de calcul limitée, un système de calcul numérique ne peut pas traiter directement un signal à temps continu. Il ne pourra effectuer des calculs qu'à partir d'un nombre fini de valeurs extraites régulièrement du signal à temps continu, que l'on appelle échantillons. En outre, le calcul numérique nécessite la mémorisation des échantillons et des résultats de calcul intermédiaires. En raison de sa nature digitale, la mémoire d'un système numérique ne peut stocker qu'un nombre fini de valeurs. Un calcul numérique ne peut donc être appliqué que sur une portion du signal de durée finie.

Par conséquent, un outil de calcul numérique ne peut traiter directement un signal à temps continu et à support temporel infini. Le calcul numérique ne pourra fournir qu'une approximation en ne réalisant un calcul qu'à partir d'un nombre fini de points, représentant une portion du signal. Si les choix de la durée pendant laquelle le signal est observé et de la fréquence d'échantillonnage sont adéquats, alors l'approximation pourra présenter une précision suffisante. Nous reviendrons sur ces conditions dans les différents algorithmes proposés.

NB : nous ne traiterons pas ici des problèmes de quantification des valeurs liées à la numérisation des signaux. En effet, les valeurs étant encodées par un mot binaire formé d'un nombre fini de bits, seul un nombre fini de valeurs peut être représenté sans erreur de quantification. Sur Matlab ou Octave, nous travaillerons avec une représentation des nombres en virgule flottante sur 64 bits, garantissant une précision suffisante pour nos besoins en travaux pratiques.

Avant de présenter les différents algorithmes de calcul, intéressons-nous à la manière dont le signal numérique issu de l'échantillonnage du signal à temps continu $x(t)$ peut être représenté. Seule une portion de durée finie notée T_{tot} est considérée. Ce signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e supposée fixe, ou avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$. Celle-ci respecte le théorème de Shannon-Nyquist, basée sur la connaissance a priori de la fréquence maximale du signal à échantillonner. On note M le nombre total de points échantillonnés, donné par :

$$M = \frac{T_{tot}}{T_e} + 1 \quad (10.1)$$

Le processus d'échantillonnage du signal $x(t)$ d'un nombre fini M de points correspond à la transformation illustrée dans la figure ci-dessous. Les valeurs prises par le signal ne sont connues qu'aux instants $t_{min} + k \times T_e$ avec k un entier $\in [0; M - 1]$. Ces valeurs sont stockées dans la mémoire du système numérique. L'information concernant l'instant d'échantillonnage ne peut pas être directement conservée. Les échantillons prélevés apparaissent comme des valeurs successives, accessibles par le système numérique en renseignant leur adresse dans la mémoire. L'ensemble des valeurs échantillonnées $x(t_{min} + k \times T_e)$ forment un tableau à une dimension que nous appellerons le vecteur $X[k]$, où k désigne une adresse en mémoire (ici, une adresse relative par rapport à celle du premier échantillon stocké que nous supposons être égal à 0). Cette disparition de l'information

temporelle n'est pas un problème en soi pour la plupart des calculs que nous présenterons. Un problème peut se poser si on souhaite tracer l'évolution temporelle du signal ou son spectre en fonction de la fréquence. Cependant, en spécifiant la période d'échantillonnage et la taille M du vecteur, il est très simple de recalculer les valeurs des instants d'échantillonnage selon l'équation 10.2 et de les stocker dans un vecteur $T[k]$.

$$T[k] = t_{\min} + k \times T_e, \quad k \in [0; M - 1] \quad (10.2)$$

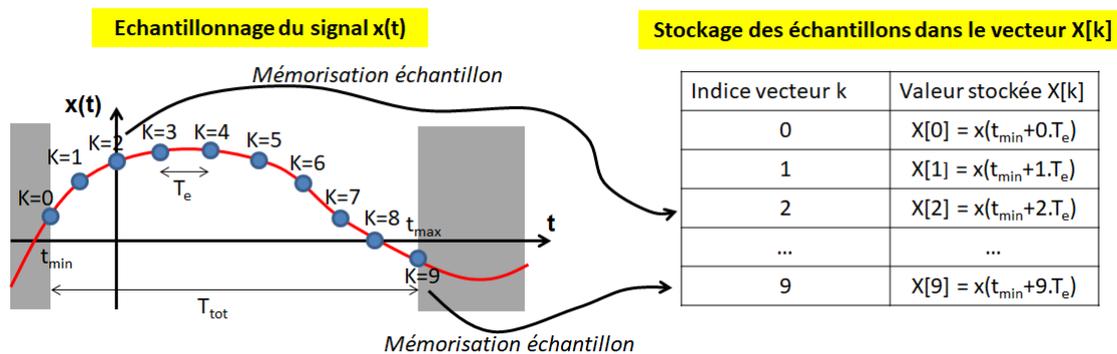


FIGURE 10.1 – Représentation du signal échantillonné sous la forme d'un vecteur de valeurs stocké en mémoire

La correspondance entre une valeur du signal échantillonné à un instant t et son indice ou adresse k est simple à déterminer. La valeur stockée à l'adresse k correspond à la valeur prise par le signal en $t = t_{\min} + k \times T_e$.

NB : idéalement, les indices k d'un vecteur pourraient être des entiers quelconques, positifs ou négatifs. Cependant, selon les langages de programmation ou les outils utilisés, des conventions peuvent imposer des règles strictes sur ces indices. Durant nos séances de travaux pratiques, les scripts seront développés et testés avec Matlab et Octave qui imposent que les indices soient des entiers strictement positifs ! La correspondance entre l'instant d'échantillonnage et l'indice k se fera à l'aide de la formule $t = t_{\min} + (k - 1) \times T_e$ avec $k \in [1; M]$. Cette convention est suivie dans les algorithmes proposés ci-dessous.

Algorithme : Génération d'un modèle de signal échantillonné

Cet algorithme simple permet la génération des M valeurs stockées dans un vecteur X et repérées par un indice entier k (strictement positif pour se conformer à la convention Matlab/Octave), correspondantes aux valeurs prises par une fonction mathématique $x(t)$ qui représente l'évolution temporelle d'un signal. De plus, on stocke dans un vecteur $Tps[k]$ les instants d'échantillonnage. Le calcul des valeurs prises par la fonction $x(t)$ aux instants d'échantillonnage est réalisé par l'appel d'une fonction "fonction temporelle" qu'il est nécessaire de spécifier.

10.2 Calcul numérique d'une intégrale

Toutes les transformations et opérations de traitement du signal abordées dans ce cours reposent sur le calcul d'une intégrale. Une première étape consiste donc à aborder le calcul numérique d'une

Algorithme 1 Génération d'un modèle de signal échantillonné

-
- 1: On fixe le nombre de points échantillonnés M .
 - 2: On fixe la période d'échantillonnage T_e , la borne temporelle minimale t_{min} .
 - 3: La durée de l'enregistrement $T_{tot} = (M - 1) \times T_e$, la borne temporelle maximale $t_{max} = t_{min} + T_{tot}$.
 - 4: Déclaration des vecteurs de taille M X et Tps .
 - 5: Boucle de calcul des valeurs prises par les vecteurs :
 - 6: **for** $k = 1$ to M **do**
 - 7: $Tps[k] = t_{min} + (k - 1) \times T_e$
 - 8: $X[k] = fonction_{temporelle}(Tps[k])$
 - 9: **end for**
-

intégrale. Nous nous bornerons ici au cas d'une intégrale à une dimension.

L'intégrale d'une fonction $x(t)$, entre les bornes d'intégration t_{min} et t_{max} correspond à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux bornes d'intégration. Pour l'évaluer exactement, il faudrait connaître toutes les valeurs prises par la fonction, ce qui est impossible en raison de l'échantillonnage. La précision du calcul numérique va dépendre de :

- du nombre d'échantillons (pour un intervalle d'intégration donné, accroître le nombre d'échantillons devrait améliorer la précision)
- l'hypothèse sur l'évolution de la fonction entre deux instants d'échantillonnage

Concernant le premier point, le nombre de points peut être augmenté jusqu'à garantir une convergence de l'intégrale calculée vers une valeur finale. Pour le second point, l'information concernant l'évolution du signal entre deux points d'échantillonnage étant perdue, nous ne pouvons émettre qu'une hypothèse sur l'évolution du signal entre deux points d'échantillonnage. Nous allons présenter deux méthodes de calcul de l'intégrale basées sur deux hypothèses simples, illustrées à la figure 10.2 :

- la fonction est supposée constante entre deux points d'échantillonnage. Elle ressemble à une fonction en marche d'escalier. L'intégrale est alors calculée selon la méthode dite des rectangles, car celle-ci est approximée en sommant les aires de rectangles élémentaires.
- on réalise une interpolation linéaire entre deux points d'échantillonnage. On relie ainsi chaque point par une droite. L'intégrale est alors calculée selon la méthode dite des trapèzes, car celle-ci est approximée en sommant les aires de trapèzes élémentaires. Théoriquement, cette deuxième méthode assure une meilleure précision que la première pour un nombre de points donnés.

Algorithme : Calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles

Les M valeurs de la fonction prises aux instants d'échantillonnage sont rangées dans le vecteur $X[k]$. Le pas d'échantillonnage T_e est connu et constant.

Algorithme 2 Calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles

-
- 1: Initialisation à 0 le résultat de l'intégrale : $integrale_X = 0$.
 - 2: Boucle de calcul de l'intégrale : :
 - 3: **for** $k = 1$ to M **do**
 - 4: Calcul de l'aire du rectangle élémentaire n°k : $Aire[k] = X[k] \times T_e$
 - 5: Ajout à l'aire totale (intégrale) : $integrale_X = integrale_X + Aire[k]$
 - 6: **end for**
-

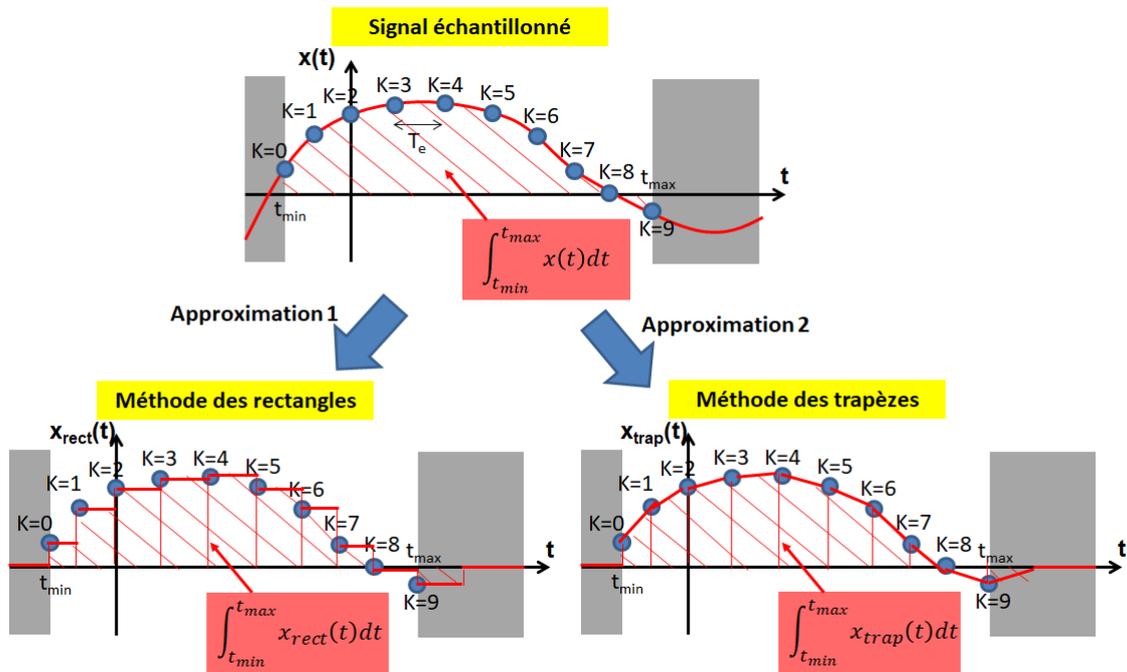


FIGURE 10.2 – Calcul approché de l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles et des trapèzes

Algorithme : Calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Les M valeurs de la fonction prises aux instants d'échantillonnage sont rangées dans le vecteur $X[k]$. Le pas d'échantillonnage T_e est connu et constant.

Algorithme 3 Calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes

- 1: Initialisation à 0 le résultat de l'intégrale : $integrale_x = 0$.
 - 2: Boucle de calcul de l'intégrale :
 - 3: **for** $k = 1$ to M **do**
 - 4: Calcul de l'aire du trapèze élémentaire n°k :
 - 5: **if** $k < M$ **then**
 - 6: $Aire[k] = \frac{X[k]+X[k+1]}{2} \times T_e$
 - 7: **else**
 - 8: $Aire[k] = \frac{X[k]}{2} \times T_e$
 - 9: **end if**
 - 10: Ajout à l'aire totale (intégrale) : $integrale_x = integrale_x + Aire[k]$
 - 11: **end for**
-

10.3 Algorithme de décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier

La décomposition d'un signal en série de Fourier ne s'applique que sur des fonctions périodiques, donc à support temporel infini. Une telle fonction ne peut pas être modélisée dans sa totalité. Cependant, en raison de sa périodicité, nous pouvons nous limiter à ne représenter la fonction que sur une seule période. En raison de l'effet de l'échantillonnage, le spectre ne pourra être calculé

que jusqu'à une fréquence maximale égale à $\frac{F_e}{2}$. Exprimé en fonction du rang n de l'harmonique, la décomposition en série de Fourier ne pourra être effectuée que jusqu'au rang :

$$N = \frac{F_e}{2 \times F_0} = \frac{T_0}{2 \times T_e}$$

où T_0 est la période fondamentale de la fonction. La décomposition en série de Fourier repose sur le calcul de l'intégrale sur une période fondamentale du produit de la fonction par une fonction (co)sinusoïdale ou exponentielle complexe. Dans l'algorithme ci-dessous, la méthode des rectangles sera employée pour le calcul de l'intégrale

Algorithme : Décomposition en série de Fourier jusqu'au rang N

Les M valeurs de la fonction prises aux instants d'échantillonnage sont rangées dans le vecteur $X[k]$. Le pas d'échantillonnage T_e est connu et constant. Les instants d'échantillonnage sont aussi calculés et rangés dans le vecteur $Tps[k]$. Les coefficients de Fourier sont calculés sous leurs différents formats : trigonométriques et complexes. Ils sont rangés dans les vecteurs $A[n]$, $B[n]$ et $C[n]$, avec $n \in [1;N]$. Les coefficients sont calculés pour les rangs nuls ($n = 1$) et positifs ($n > 1$). Les fréquences associées aux harmoniques sont aussi calculées et rangées dans le vecteur $Freq[n]$. L'algorithme proposé est général et peut largement être optimisé pour le rendre plus rapide. On suppose que le langage de programmation utilisé supporte la manipulation de nombre complexe.

10.4 Extension au calcul de la transformée de Fourier d'un signal

L'algorithme précédent peut être réutilisé pour déterminer les valeurs de la transformée de Fourier d'un signal non périodique. Cependant, pour fournir un résultat valide, cet algorithme ne peut être utilisé que pour des fonctions à support temporel fini. La portion de fonction temporelle modélisée doit recouvrir tout l'intervalle où la fonction est non nulle. La fréquence maximale de calcul f_{max} doit être choisie pour respecter le théorème de Shannon-Nyquist. Si on fixe un nombre N de fréquences de calcul, la résolution fréquentielle df sera donnée par

$$df = \frac{f_{max}}{N-1} = \frac{F_e}{2(N-1)} \quad (10.3)$$

Algorithme : Calcul de la transformée de Fourier d'un fonction à support temporel fini

Les M valeurs de la fonction prises aux instants d'échantillonnage sont rangées dans le vecteur $X[k]$. Le pas d'échantillonnage T_e est connu et constant. Les instants d'échantillonnage sont aussi calculés et rangés dans le vecteur $Tps[k]$. Les valeurs de la transformée de Fourier sont rangés dans le vecteur $Fourier[n]$, avec $n \in [1;N]$. La transformée de Fourier est calculée uniquement pour les fréquences positives ou nulles. Celles-ci sont calculées et rangées dans le vecteur $Freq[m]$. L'algorithme proposé est général et peut largement être optimisé pour le rendre plus rapide. On suppose que le langage de programmation utilisé supporte la manipulation de nombre complexe.

10.5 Calcul numérique du produit de convolution de deux fonctions à supports temporels finis

On ne traite ici que du cas de deux fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à supports temporels finis, c'est-à-dire qu'elles s'annulent partout, sauf à l'intérieur d'un intervalle de temps donné. On suppose qu'elles sont échantillonnées avec le même pas d'échantillonnage T_e . Le résultat du produit de convolution,

Algorithme 4 Décomposition en série de Fourier jusqu'au rang N

```

1: On spécifie la fréquence fondamentale  $F_0 = \frac{1}{T_0}$ , le rang maximal  $N$ .
2: Calcule les temps associés aux instants d'échantillonnage :
3: for  $k = 1$  to  $M$  do
4:    $Tps[k] = (k - 1) * T_e$ 
5: end for
6: Boucle fréquentielle :
7: for  $n = 1$  to  $N$  do
8:   Calcul de la fréquence associée à l'harmonique de rang  $n$  :  $Freq[n] = (n - 1) \times F_0$ 
9:   Initialisation des coefficients de Fourier de rang  $n$  :  $A[n] = 0, B[n] = 0, C[n] = 0$ .
10:  Boucle de calcul de l'intégrale :
11:  for  $k = 1$  to  $M$  do
12:    Calcul des coefficients  $A[n]$  :
13:    if  $n = 1$  then
14:       $A[n] = A[n] + X[k]$ 
15:    else
16:       $A[n] = A[n] + 2X[k] \times \cos(2\pi(n - 1)Freq[n] \times Tps[k])$ 
17:    end if
18:
19:    Calcul des coefficients  $B[n]$  :
20:    if  $n = 1$  then
21:       $B[n] = 0$ 
22:    else
23:       $B[n] = B[n] + 2X[k] \times \sin(2\pi(n - 1)Freq[n] \times Tps[k])$ 
24:    end if
25:
26:    Calcul des coefficients  $C[n]$  :
27:    if  $n = 1$  then
28:       $C[n] = C[n] + X[k]$ 
29:    else
30:       $C[n] = C[n] + X[k] \times \exp(-j2\pi(n - 1)Freq[n] \times Tps[k])$ 
31:    end if
32:  end for
33:  Mise à l'échelle des coefficients de rang  $n$  :
34:   $A[n] = A[n] \times \frac{T_e}{T_0}$ 
35:   $B[n] = B[n] \times \frac{T_e}{T_0}$ 
36:   $C[n] = C[n] \times \frac{T_e}{T_0}$ 
37: end for

```

Algorithme 5 Calcul de la transformée de Fourier d'une fonction à support temporel fini

- 1: Calcul de la fréquence maximale de calcul $f_{max} = \frac{F_e}{2}$.
 - 2: Calcul de la résolution fréquentielle $df = \frac{f_{max}}{N-1}$.
 - 3: Calcul des temps associés aux instants d'échantillonnage :
 - 4: **for** $k = 1$ to M **do**
 - 5: $Tps[k] = (k - 1) * T_e$
 - 6: **end for**
 - 7: Boucle fréquentielle :
 - 8: **for** $n = 1$ to N **do**
 - 9: Calcul de la fréquence associée à l'indice n : $Freq[n] = (n - 1) \times df$
 - 10: Initialisation de la valeur de transformée de Fourier d'indice n : $Fourier[n] = 0$.
 - 11: Boucle de calcul de l'intégrale :
 - 12: **for** $k = 1$ to M **do**
 - 13: $Fourier[n] = Fourier[n] + X[k] \times \exp(-j2\pi(n - 1)Freq[n] \times Tps[k])$
 - 14: **end for**
 - 15: Multiplication par le pas d'échantillonnage : $Fourier[n] = Fourier[n] \times T_e$.
 - 16: **end for**
-

$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ sera une nouvelle fonction, échantillonnée avec le même pas temporel et à support temporel borné.

Commençons par déterminer les caractéristiques du support temporel borné de $y(t)$ (bornes temporelles t_{ymin} et t_{ymax} et nombre de points N_y) en fonction des caractéristiques de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. On note N_1 et N_2 le nombre de points formant les supports temporels bornés de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Leurs bornes minimales sont respectivement t_{min1} et t_{min2} , tandis que leurs bornes maximales sont t_{max1} et t_{max2} . Le support temporel sur lequel la fonction $y(t)$ ne s'annule pas est donné par $[t_{min1} + t_{min2}; t_{max1} + t_{max2}]$. Le nombre de points formant ce support est égal à $N_y = N_1 + N_2 - 1$. Comme précédemment, les valeurs des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sur leurs supports temporels bornés sont rangées dans des vecteurs $X_1[k]$ et $X_2[k]$. La mise en œuvre algorithmique du produit de convolution (équation ci-dessous) n'est pas triviale. Tout d'abord, le produit de convolution se résume à une intégrale, donc nous pouvons réutiliser les algorithmes précédents (nous utiliserons la méthode des rectangles). L'équation 10.4 fait apparaître des bornes infinies, ce qui n'est pas compatible avec les exigences du calcul numérique. Mais comme les fonctions sont à support temporel fini, le calcul de l'intégrale pourra être réalisé par la somme d'un nombre fini de termes. Mais le plus difficile reste la nécessité de considérer deux paramètres temporels distincts, notés t et τ dans l'équation 10.4. On remarque que l'on multiplie les fonctions x_1 et x_2 , mais prises à des instants différents. Cela complique la récupération des valeurs stockées dans les vecteurs X_1 et X_2 . Autrement dit, déterminer correctement les indices associés aux valeurs stockées.

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \quad (10.4)$$

L'intégrale donnée par l'équation 10.4 peut être transformée en somme discrète (équation 10.5), où $Y[i]$ est le vecteur stockant les valeurs du produit de convolution. Les deux paramètres temporels t et τ ont été remplacés par deux indices i et k permettant de parcourir les valeurs des différents vecteurs.

$$Y[i] = \sum_{k=1}^{N_1} X_1[k].X_2[i - k].T_e, \quad i \in [1; N_1 + N_2 - 1] \quad (10.5)$$

Avec les indices employés, on garantit que l'on parcourt les N_1 valeurs du vecteur X_1 (comprises entre les indices 1 et N_1) et les $N_1 + N_2 - 1$ valeurs du vecteur Y (comprises entre 1 et $N_1 + N_2 - 1$).

Par contre, rien n'interdit d'accéder à des valeurs du vecteur X_2 à des indices non compris entre 1 et N_2 , conduisant à une violation d'adresse et donc une erreur. Il est donc nécessaire d'ajouter une vérification pour exclure les cas où l'indice $i - k$, qui permet le parcours des valeurs du vecteur X_2 , reste compris entre 1 et N_2 . Cette vérification ne compromet pas la validité du calcul car les valeurs qui correspondraient à des indices en dehors de l'intervalle $[1; N_2]$ sont en dehors du support temporel borné $[t_{min2}; t_{max2}]$ où le signal $x_2(t)$ est nul.

Algorithme : Calcul du produit de convolution de deux fonctions à supports temporels finis

Les N_1 et N_2 valeurs des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont connues et rangées dans les vecteurs X_1 et X_2 . Le pas d'échantillonnage T_e est connu et constant. On connaît aussi les bornes des supports temporels des fonctions : t_{min1} et t_{max1} pour x_1 , t_{min2} et t_{max2} pour x_2 . L'algorithme calcule d'abord les temps associés au produit de convolution, rangés dans le vecteur Tps , puis réalise le calcul du produit de convolution des vecteurs X_1 et X_2 . Le résultat est rangé dans le vecteur Y .

Algorithme 6 Calcul du produit de convolution de deux fonctions à supports temporels finis

- 1: Calcul du nombre de points du vecteur Y : $N_y = N_1 + N_2 - 1$.
 - 2: Calcul des temps associés au produit de convolution :
 - 3: **for** $i = 1$ to N_y **do**
 - 4: $Tps[i] = (i - 1) * T_e + t_{min1} + t_{min2}$
 - 5: **end for**
 - 6: Boucle de calcul du produit de convolution (deux boucles imbriquées pour balayer l'indice i du vecteur Y et l'indice k du vecteur X_1) :
 - 7: **for** $i = 1$ to N_y **do**
 - 8: **for** $k = 1$ to N_1 **do**
 - 9: **if** $(i - k > 0)$ **and** $(i - k \leq N_2)$ **then**
 - 10: $Y[i] = Y[i] + X_1[k] \times X_2[i - k]$
 - 11: **end if**
 - 12: **end for**
 - 13: Multiplication par le pas d'échantillonnage : $Y[i] = Y[i] \times T_e$
 - 14: **end for**
-

10.6 Calcul numérique de la fonction de corrélation de deux fonctions à supports temporels finis

Le calcul de la fonction de corrélation R_{12} entre deux fonctions à supports temporels bornés est assez proche de celui du produit de convolution. Cependant, une différence provient de l'absence de "retournement" d'un des signaux, comme le montre l'équation 10.6.

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t - \tau)dt \tag{10.6}$$

Commençons par déterminer les caractéristiques du support temporel borné de R_{12} (bornes temporelles t_{Rmin} et t_{Rmax} et nombre de points N_R) en fonction des caractéristiques de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. On note N_1 et N_2 le nombre de points formant les supports temporels bornés de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Leurs bornes minimales sont respectivement t_{min1} et t_{min2} , tandis que leurs bornes maximales sont t_{max1} et t_{max2} . Le support temporel sur lequel la fonction R_{12} ne s'annule pas est donné par $[-t_{max2} + t_{min1}; t_{max1} - t_{min2}]$. Le nombre de points formant ce support est égal à $N_R = N_1 + N_2 - 1$.

En notant i_{min1} et i_{max1} les indices définissant les valeurs du vecteur X_1 , et i_{min2} et i_{max2} ceux du vecteur X_2 , l'intégrale de la fonction de corrélation peut être transformée directement sous la forme de la somme discrète suivante :

$$R_{12}[i] = \sum_{k=i_{min1}}^{i_{max1}} X_1[k].X_2[k-i].T_e, \quad i \in [-i_{max2} + i_{min1}; i_{max1} - i_{min2}] \quad (10.7)$$

Le vecteur R_{12} prend des valeurs non nulles entre les indices $-i_{max2} + i_{min1}$ et $i_{max1} - i_{min2}$. Un problème apparaît : même si on fixe des indices i_{min1} , i_{max1} , i_{min2} et i_{max2} positifs, l'indice i risque de prendre des valeurs négatifs. Or, la plupart des langages de programmation ne supporte pas que des indices de tableaux prennent des valeurs négatives. Pour que cette situation ne se produise pas, il faut changer l'intervalle de balayage de l'indice i en ajoutant $i_{max2} - i_{min1} + 1$. Celui-ci est alors compris entre $[1; N_1 + N_2 - 1]$. Cependant, il faut compenser la translation de l'indice i dans l'indice de balayage de X_2 : on doit aussi ajouter $i_{max2} - i_{min1} + 1$ à l'indice $k - i$. Finalement, la somme discrète permettant le calcul de la corrélation devient :

$$R_{12}[i] = \sum_{k=i_{min1}}^{i_{max1}} X_1[k].X_2[k - i + i_{max2} - i_{min1} + 1].T_e, \quad i \in [1; N_1 + N_2 - 1] \quad (10.8)$$

Finalement, en prenant $i_{min1} = i_{min2} = 1$, $i_{max1} = N_1$ et $i_{max2} = N_2$, l'équation 10.8 devient :

$$R_{12}[i] = \sum_{k=i_1}^{i_{N_1}} X_1[k].X_2[k - i + N_2].T_e, \quad i \in [1; N_1 + N_2 - 1] \quad (10.9)$$

Comme pour l'algorithme du produit de convolution, il faudra vérifier si l'indice de balayage du vecteur X_2 sort de l'intervalle $[1; N_2]$.

Algorithme : Calcul de la fonction de corrélation entre deux fonctions à supports temporels finis

Les N_1 et N_2 valeurs des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont connues et rangées dans les vecteurs X_1 et X_2 . Le pas d'échantillonnage T_e est connu et constant. On connaît aussi les bornes des supports temporels des fonctions : t_{min1} et t_{max1} pour x_1 , t_{min2} et t_{max2} pour x_2 . L'algorithme calcule d'abord les temps associés à la fonction de corrélation, rangés dans le vecteur Tps , puis réalise le calcul de la corrélation des vecteurs X_1 et X_2 . Le résultat est rangé dans le vecteur R_{12} .

Algorithme 7 Calcul de la fonction de corrélation entre deux fonctions à supports temporels finis

- 1: Calcul du nombre de points du vecteur R_{12} : $N_R = N_1 + N_2 - 1$.
 - 2: Calcul des temps associés à la fonction de corrélation :
 - 3: **for** $i = 1$ to N_R **do**
 - 4: $Tps[i] = (i - 1) * T_e + t_{min1} + t_{min2}$
 - 5: **end for**
 - 6: Boucle de calcul de la fonction de corrélation (deux boucles imbriquées pour balayer l'indice i du vecteur R_{12} et l'indice k du vecteur X_1) :
 - 7: **for** $i = 1$ to N_y **do**
 - 8: **for** $k = 1$ to N_1 **do**
 - 9: **if** $(k - i + N_2 > 0)$ **and** $(k - i + N_2 \leq N_2)$ **then**
 - 10: $R_{12}[i] = R_{12}[i] + X_1[k] \times X_2[k - i + N_2]$
 - 11: **end if**
 - 12: **end for**
 - 13: Multiplication par le pas d'échantillonnage : $R_{12}[i] = R_{12}[i] \times T_e$
 - 14: **end for**
-