

Couplage Electromagnétique

Exercices d'application

Exercice 1 – Puissance transportée par une onde électromagnétique

Une mesure de champ électromagnétique a été effectuée dans un appartement situé à proximité d'un émetteur radiofréquence. La mesure est effectuée à l'aide d'un mesureur de champ électrique. La mesure indique un champ électrique d'amplitude crête de 10 V/m.

1. Déterminez la densité de puissance crête et moyenne transportée par l'onde électromagnétique.

2. Les recommandations européennes d'exposition du public aux champs électromagnétiques exigent que les personnes ne soient pas soumises à une densité de puissance crête $> 2 \text{ W/m}^2$. Que concluez-vous de cette mesure ?



Exercice 2 – Modèle de ligne

Soit une ligne bifilaire de 1 m de long. Le rayon de chaque brin est de 1 mm et la séparation entre le brin est de 5 mm. Le métal présente une conductivité σ_c de $5.6 \times 10^7 \text{ S/m}$. On suppose que les conducteurs baignent dans un milieu diélectrique de permittivité relative $\epsilon_r = 2.2$, de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$ et de conductivité $\sigma_d = 10^{-6} \text{ S/m}$. On transmet des signaux dont l'occupation fréquentielle est comprise entre 1 et 100 MHz.

1. Calculer l'inductance, la capacité, la résistance et la conductivité linéique de cette ligne.

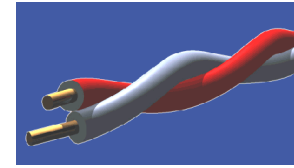
2. Déterminer l'impédance caractéristique de la ligne et la vitesse de propagation (on pourra vérifier que la ligne présente des pertes faibles).

3. En déduire un modèle électrique équivalent pour la ligne.

4. On dispose maintenant d'une seconde ligne supposée à faible pertes. Son impédance caractéristique est de $Z_c = 100 \Omega$ et la vitesse de propagation de $2.6 \times 10^8 \text{ m/s}$. En déduire l'inductance et la capacité linéique de cette ligne.

Exercice 3 – Transmission d'un signal sur une paire bifilaire

On considère une ligne bifilaire de longueur $L = 1$ mètre composée de 2 fils de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ et séparés d'une distance $d = 500 \mu\text{m}$. On suppose que les conducteurs sont idéaux. On applique en entrée de la ligne un signal de type échelon d'amplitude 1 V . Le générateur présente une impédance de sortie de 10Ω . La ligne est chargée à l'autre extrémité par une résistance de 300Ω .



On note $V(0,t)$ et $V(L,t)$ les tensions aux 2 extrémités de la ligne, et $I(0,t)$ et $I(L,t)$ les courants traversant les charges connectées à chaque extrémité de la ligne.

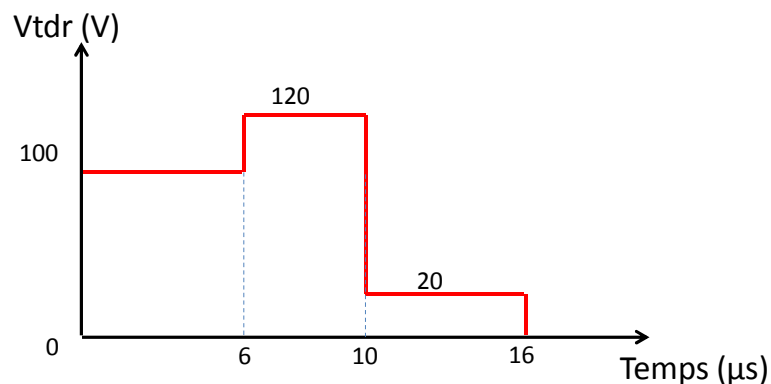
1. Tracer l'évolution dans le temps des tensions $V(0,t)$, $V(L,t)$ et des courants $I(0,t)$ et $I(L,t)$.
2. Vers quelles valeurs convergent le courant et la tension mesurés à chaque extrémité de la ligne ?

Exercice 4 – Réflectométrie

Un réflectomètre dans le domaine temporel (Time Domain reflectometry TDR) est un instrument de mesure utilisé pour analyser les propriétés des lignes de transmission et localiser des défauts tels que des cassures. Le principe de fonctionnement repose sur l'envoi d'une impulsion brève par le réflectomètre dans la ligne à analyser et l'enregistrement simultané de la tension en sortie du réflectomètre. Celle-ci dépend de l'onde incidente produite par le réflectomètre, mais aussi de la réflexion produite par les ruptures d'impédance de la ligne à analyser.

La tension de circuit ouvert du réflectomètre est une impulsion d'amplitude $V_{co} = 200 \text{ V}$ et de $10 \mu\text{s}$ de largeur. L'impédance de sortie du réflectomètre est $Z_{TDR} = 50 \Omega$.

On souhaite analyser un câble coaxial de longueur L inconnue et connectée sur une charge résistive terminale Z_L , elle aussi inconnue. On sait seulement que le câble est adapté $Z_c = 50 \Omega$ et qu'il est constitué d'un isolant de type teflon ($\epsilon_r = 2.1$). On suppose que le câble ne présente pas de défauts. La mesure au réflectomètre de ce câble donne le résultat suivant :



Déterminer la longueur L du câble et l'impédance de la charge terminale Z_L .

Exercice 5 – Diagnostic d'un bus CAN

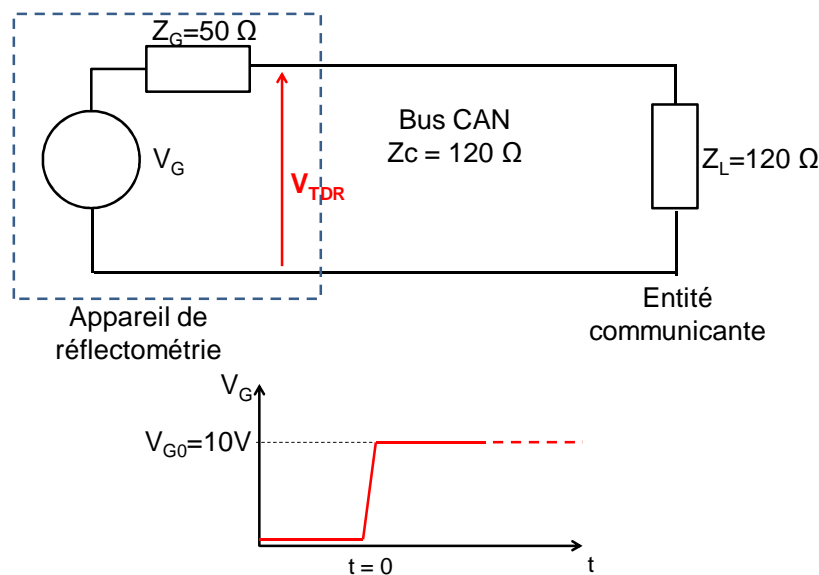
Le bus CAN (Controller Area Network – standard IEEE 11898) est un bus numérique industriel largement utilisé pour les applications automobiles. Il est dédié à la communication entre les différents organes de contrôle, capteurs et actionneurs répartis dans un véhicule (il peut connecter jusqu'à 2048 entités). L'information numérique est transportée par un signal différentiel, dont le support physique le plus courant est une paire bifilaire, d'impédance caractéristique $Z_c = 120 \Omega$. Chaque entité connectée au bus présente une impédance d'entrée de 120Ω .

On souhaite diagnostiquer les défauts d'un bus CAN implémenté dans un véhicule, à l'aide d'une méthode basée sur la réflectométrie. On s'intéresse à deux types de défauts :

- Des ruptures de fil, qu'on représentera par un circuit ouvert (impédance infinie)
- Un court-circuit entre les 2 fils du bus (impédance nulle)

La paire bifilaire utilisée pour le bus a une longueur $L = 10 \text{ m}$, la vitesse de propagation le long du bus v est de $2 \times 10^8 \text{ m/s}$. On suppose que les pertes de la ligne sont négligeables. On suppose que le bus est connecté à une extrémité à l'appareil de réflectométrie (appareil de diagnostic), et à une entité communicante à l'autre extrémité.

L'appareil de réflectométrie employé génère des signaux de type échelon d'amplitude $V_{G0} = 10 \text{ V}$. On négligera le temps de montée du signal. L'impédance de sortie de l'appareil Z_G est de 50Ω . Celui-ci mesure le profil temporel de tension V_{TDR} en sortie de l'appareil.



1. Pourquoi chaque entité communicante connectée au bus doit présenter une impédance d'entrée de 120Ω ?

2. Calculer les coefficients de réflexion Γ_G et Γ_L , en entrée et en sortie du bus. Calculer le temps de propagation T_p d'un signal d'un bout à l'autre du bus.

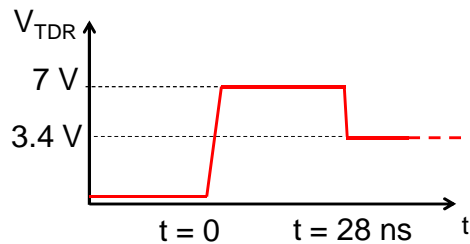
3. On suppose dans un premier temps que le bus ne présente aucun défaut. A l'aide d'un diagramme de bounce, tracer le profil de tension mesuré par l'appareil de réflectométrie.

4. On suppose qu'un défaut de type rupture de fil est présent sur le bus. Quel est le modèle électrique équivalent du bus ? A l'aide d'un diagramme de bounce, tracer le profil de tension mesuré par l'appareil de réflectométrie en présence de ce défaut. On appellera T_{def} le

temps parcouru par le signal incident pour atteindre le défaut. On pourra arrêter le tracé du profil de tension après $2 \times T_{\text{def}}$.

5. On suppose qu'un défaut de type court-circuit est présent sur le bus. Quel est le modèle électrique équivalent du bus ? A l'aide d'un diagramme de bounce, tracer le profil de tension mesuré par l'appareil de réflectométrie en présence de ce défaut. On appellera T_{def} le temps parcouru par le signal incident pour atteindre le défaut. On pourra arrêter le tracé du profil de tension après $2 \times T_{\text{def}}$.

6. On a obtenu le relevé suivant avec un bus. Ce bus est-il défectueux ? Si oui, donnez qualitativement le type de défaut ainsi que sa position.



Exercice 6 – Lignes en $\lambda/4$ – transformateur d'impédance

Une ligne en $\lambda/4$ est une ligne dont la longueur est égale au quart de la longueur d'onde à une fréquence donnée. Le but de cet exercice est de comprendre les propriétés intéressantes de toute ligne de transmission en condition $\lambda/4$ en tant que transformateur d'impédance.

1. Soit une ligne de transmission de longueur l d'impédance caractéristique Z_c , chargée par une impédance terminale Z_L . On appelle β la constante de propagation. Déterminer l'expression théorique de l'impédance Z_{in} vue depuis l'entrée de la ligne.

2. Que devient l'expression précédente si la longueur de la ligne $l = \lambda/4$? Quel est l'effet de la ligne sur l'impédance vue depuis l'entrée de la ligne ?

3. En condition $\lambda/4$, quelle impédance voit-on en entrée de la ligne si on charge la sortie de la ligne par une capacité C ? Par une inductance L ?

4. On connecte une antenne à un générateur de tension à l'aide d'une ligne microruban d'impédance caractéristique $Z_c = 50 \Omega$. L'impédance de sortie du générateur est aussi $= 50 \Omega$. L'antenne doit émettre à 2 GHz. A cette fréquence, l'antenne est équivalente à une impédance complexe formée par une résistance de 50Ω en parallèle d'une capacité de 10 pF. Que pensez-vous de l'efficacité de transfert de puissance entre le générateur et l'antenne ? Quelle condition faudrait-il assurer pour l'optimiser ?

5. Montrez qu'en ajoutant une inductance en parallèle de l'antenne il est possible d'optimiser le transfert de puissance à l'antenne à une fréquence donnée. Quelle valeur faudrait-il donner à cette inductance pour optimiser le transfert de puissance à 2 GHz ?

6. En vous basant sur les questions précédentes, comment pourrait-on optimiser le transfert de puissance à l'antenne à l'aide d'un condensateur ? Quelle valeur choisiriez-vous pour ce condensateur ?

Exercice 7 – Filtre à ligne micro ruban

Une ligne de transmission peut être modélisée à l'aide d'un réseau distribué d'inductances et de capacités. Judicieusement dimensionnée, une ligne peut donc servir de filtre passe-bas, passe-haut ou passe-bande. Le but de cet exercice est de comprendre le principe de base d'un filtre à ligne micro ruban.

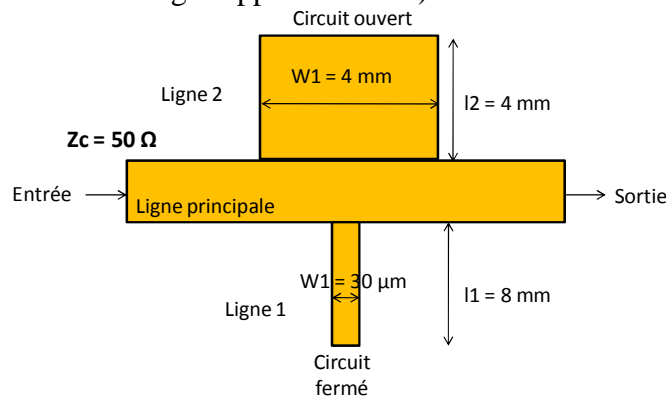
1. Soit une ligne micro ruban d'impédance caractéristique Z_c et de longueur l , chargé par une impédance Z_L . Montrer que l'impédance d'entrée de la ligne peut s'écrire :

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_L \tan \beta l}$$

2. Simplifier l'expression précédente dans le cas d'une ligne électriquement courte ($l \ll \lambda$).

3. Dans le cas d'une ligne électriquement courte, calculer l'impédance d'entrée de la ligne en fonction de la fréquence lorsque la ligne est chargée par une faible impédance Z_L tel que : $Z_L \ll Z_c \beta l$? Si $Z_c \ll Z_L \beta l$? Dans les 2 cas, comment se comporte la ligne ?

4. Soit une ligne micro-ruban adaptée 50 ohms. Celle-ci est réalisée sur un substrat de permittivité électrique relative $\epsilon_r = 4.5$ et d'épaisseur $h = 0.15$ mm. Un générateur de tension d'amplitude interne V_G avec une résistance série R_G de 50 ohms est connecté en entrée de la ligne, alors qu'une charge 50 ohms est connectée sur la sortie. Au milieu de cette ligne principale, deux autres lignes micro ruban appelées ligne 1 et ligne 2 sont connectées en parallèle. La ligne 1 est court-circuitée au plan de masse, alors que la ligne 2 se termine en circuit ouvert (impédance de charge supposée infinie).



a. Vérifiez que les lignes 1 et 2 sont électriquement courtes jusqu'à 2.5 GHz.

b. Déterminez les paramètres linéiques de la ligne 1 (on négligera ses pertes). En déduire son impédance caractéristique et la vitesse de propagation de l'onde le long de la ligne.

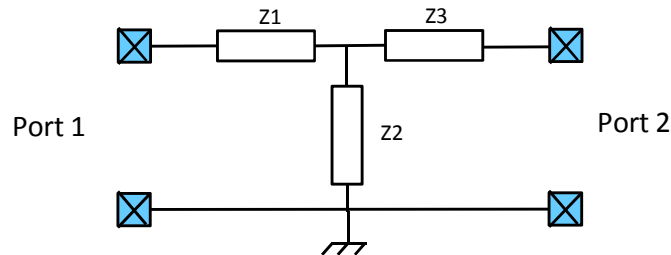
c. En assimilant la ligne 2 comme une capacité plane, déterminez la capacité équivalente représentée par la ligne.

d. Construire le modèle électrique équivalent de cette ligne jusqu'à 2.5 GHz, en se basant sur les résultats de la question 3.

e. Spécifiez la nature du filtre formé par les lignes 1 et 2, ainsi que la fréquence singulière de ce filtre.

Exercice 8 – Utilisation de la matrice ABCD

1. Soit le circuit en T ci-dessous. Déterminez la matrice ABCD de ce circuit.



2. En utilisant les matrices ABCD, déterminez l'impédance d'entrée d'une ligne sans pertes, de longueur L et d'impédance caractéristique Z_c , chargée par une impédance notée Z_L . Que se passe-t-il si $Z_L = Z_c$?

3. Soit ABCD la matrice de la ligne précédente chargée par une impédance quelconque notée Z_L . Celle-ci est excitée par un générateur de tension V_g et d'impédance de sortie Z_g . Exprimez la tension d'entrée en fonction de Z_g , V_g et des paramètres de la matrice. En déduire l'expression de la tension d'entrée si $Z_g = Z_c$.

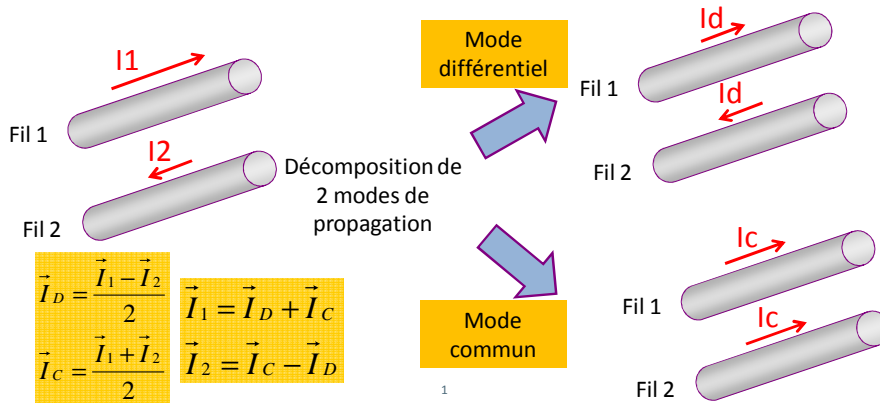
Exercice 9 – Emission rayonnée d'une ligne bifilaire – Mode différentiel vs. mode commun

Une ligne de transmission parcourue par un courant va produire à grande distance une onde électromagnétique. Le but de cet exercice est de déterminer l'expression du champ électrique produit par une ligne bifilaire en champ lointain.

Soit une ligne bifilaire de longueur L et d'impédance caractéristique Z_c . On suppose que la longueur de la ligne est électriquement courte. On suppose aussi que la ligne est adaptée. Les 2 brins sont séparés par une distance notée d , largement inférieure à la longueur d'onde.

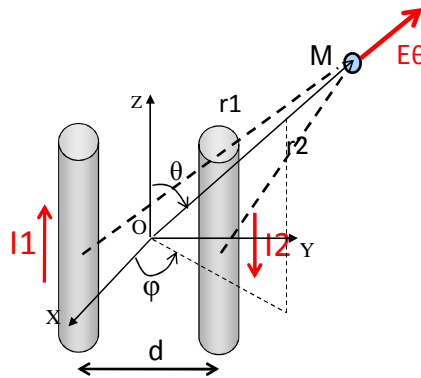
Nous allons considérer 2 modes de propagation du courant : le mode différentiel et le mode commun. Le mode différentiel est le mode « normal » de fonctionnement d'une ligne de transmission à 2 conducteurs : un des conducteurs est le conducteur aller, l'autre conducteur est l'unique conducteur de retour. Dans le mode commun, le 2^e conducteur devient aussi un conducteur aller (le conducteur retour est alors assuré par un 3^e conducteur, que nous n'identifierons pas). Le courant circule alors dans le même sens dans les 2 conducteurs de la paire bifilaire.

Dans un cas pratique, le courant qui circule dans les différents conducteurs de lignes de transmission résulte de la superposition des modes différentiels et communs. Nous allons voir que les courants de mode différentiel et de mode commun n'ont pas le même impact sur l'émission rayonnée.



1. Connaissant l'amplitude du courant sur un des brins de la ligne, pourquoi peut-on utiliser l'approximation du dipôle élémentaire pour calculer le champ électrique produit en champ lointain par ce brin ?

2. En utilisant le repère géométrique ci-dessous centré sur le point O, déterminez l'expression théorique du champ électrique en champ lointain. On note I1 et I2 les courants circulant sur chacun des 2 brins de la paire bifilaire.



a. On place un point d'observation M à grande distance de la paire bifilaire ($r \gg d$ et $r \gg L$). Déterminez une expression du champ électrique en M en fonction des courants I1 et I2, ainsi que des distances r1 et r2 entre M et le centre de chaque brin.

b. En notant r la distance entre le point O et le point M, montrez que : $r_1 = r + \Delta$ et $r_2 = r - \Delta$. Précisez la valeur de Δ . Exprimez le champ électrique en fonction de r et Δ .

3. On considère qu'un courant différentiel I_d circule sur les 2 conducteurs. Donnez l'expression théorique du champ électrique au point M en fonction de la fréquence f. Dans quelle direction le champ est-il maximal ? Montrez que le champ peut s'écrire dans cette direction sous la forme : $E_{\max} = K_d \cdot L \cdot d \cdot f^2 / r \cdot I_d$, où K_d est une constante à préciser.

4. On considère maintenant qu'un courant de mode commun I_c circule sur les 2 conducteurs. Donnez l'expression théorique du champ électrique au point M en fonction de la fréquence f. Dans quelle direction le champ est-il maximal ? Montrez que le champ peut s'écrire dans cette direction sous la forme : $E_{\max} = K_c \cdot L \cdot f / r \cdot I_c$, où K_c est une constante à préciser.

5. Soit une ligne bifilaire de longueur $L = 50$ cm, les 2 brins sont séparés d'une distance $d = 1$ cm. Jusqu'à quelle fréquence l'approximation que nous avons faite sera exacte ? Calculez l'amplitude des champs électriques maximum à 1 m produit par un courant de mode différentiel, puis par un courant de mode commun. Pour une amplitude de courant donné, conclure sur l'effet de chacun de ces 2 modes.

Exercice 10 – Emission rayonnée d'une ligne longue

Cet exercice étant la suite de l'exercice 9, il est conseillé de faire ce dernier avant

On considère une paire bifilaire de longueur L , qu'on ne suppose plus électriquement courte. La séparation entre les 2 brins est notée d . Celle-ci est supposée très petite devant la longueur d'onde. On suppose que la ligne est parfaitement adaptée et sans pertes. On note β_L la constante de propagation de l'onde le long de la ligne, et β_0 la constante de propagation de l'onde en espace libre

On considère que le courant qui circule sur la ligne est purement différentiel. On considère aussi un courant sinusoïdal d'amplitude I_0 . La ligne est orientée le long de l'axe Z , les positions le long de la ligne sont repérées à partir d'une origine placée au centre de la ligne (positions comprises entre $-L/2$ et $+L/2$).

1. Quel est l'expression du courant différentiel circulant le long de la ligne, en fonction de la position z sur la ligne.

2. Etablir l'expression du champ électrique différentiel dE_D en champ lointain produit par un tronçon de ligne électriquement court, de longueur noté dL .

3. En déduire l'expression du champ électrique différentiel E_D en champ lointain produit par toute la ligne. Vérifiez que l'on retrouve l'expression du champ électrique différentiel d'une ligne courte, déterminée à la question 3 de l'exercice 9.

4. Pour quelle(s) fréquence(s) le rayonnement en champ lointain produit par la ligne présente-il des maxima ? des minima ?

Exercice 11 – Antenne de mesure

On souhaite mesurer le champ électrique à 900 MHz en utilisant un dipôle demi-onde. On suppose que l'on est en conditions de champ lointain et en espace libre. L'impédance d'onde est celle du vide.

1. Quelle longueur donneriez-vous au dipôle ? Quelle est sa surface équivalente ?

2. Calculer la valeur théorique de son facteur d'antenne, en considérant que le récepteur présente une impédance d'entrée de 50Ω ? Si la tension mesurée aux bornes de l'antenne est de 1 V, quelle est l'amplitude du champ électrique incident ? Et celle du champ magnétique associé ?

3. Après caractérisation de cette antenne, on obtient les données suivantes :

- efficacité $\eta = 95 \%$
- coefficient de réflexion en entrée $\Gamma = 0.1$ (en considérant une impédance caractéristique de 50Ω)

La mesure sur une charge 50 ohms donne une puissance de $0.1 \mu\text{W}$. Quelle est la valeur du champ électrique incident ?

Exercice 12 – Antenne isotrope

Soit une antenne isotrope parfaitement adaptée et sans pertes. On la fait fonctionner à une fréquence $F = 1 \text{ GHz}$. On lui fournit une puissance électrique moyenne de 100 mW .

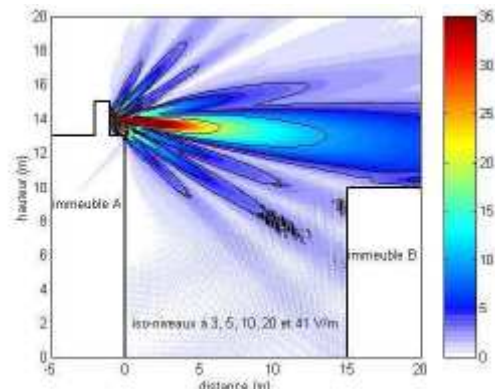
1. En champ lointain, quel est le gain de cette antenne ? (la réponse à cette question ne nécessite aucun calcul).
2. On se place à une distance $R = 10 \text{ m}$ de l'antenne. Est-on dans la région de champ proche ou de champ lointain de l'antenne ?
3. Calculez la densité de puissance de l'onde électromagnétique produite par l'antenne à une distance $R = 10 \text{ m}$.
4. Calculez l'amplitude du champ électrique à 10 m de cette antenne.

Exercice 13 – Périmètre de sécurité autour d'une station de base UMTS

Une station de base UMTS est placée sur le toit d'un immeuble. Le gain de l'antenne est de 60 en face avant de l'antenne. La puissance d'émission moyenne est de 20 W sur une bande située autour de 2100 MHz .

La figure ci-contre présente une simulation du rayonnement produit par ce type d'antenne. Elle montre qu'un immeuble voisin peut recevoir un champ électrique important.

Cependant, la législation européenne exige qu'à cette fréquence, le public ne soit pas exposé à un champ électrique supérieur à 61 V/m , et que le personnel habilité ne soit pas exposé à plus de 137 V/m .



www.anfr.fr

1. Déterminez le périmètre de sécurité en face de l'antenne pour le public.
2. A quelle distance peut s'approcher une personne habilitée de l'antenne ?

Exercice 14 – Récupération d'énergie d'un émetteur radio

On souhaite récupérer l'énergie rayonnée par une station de base GSM afin d'alimenter plusieurs capteurs d'environnement. Le système de récupération d'énergie dispose d'une antenne de réception d'un gain de 1.5 . Elle est accordée à 930 MHz , la fréquence d'un canal

GSM sur lequel la station de base émet. On suppose que le rendement de l'antenne est égal à 0.85.

La station de base émet une puissance moyenne de 10 W à l'aide d'une antenne présentant un gain de 60. On suppose que l'antenne de réception du capteur est placée à 5 mètres de l'antenne émettrice, dans la direction de son lobe principal.

Déterminez la puissance électrique moyenne qu'on est susceptible de récupérer.

Corrections

Exercice 1 – Puissance transportée par une onde électromagnétique

Une mesure de champ électromagnétique a été effectuée dans un appartement situé à proximité d'un émetteur radiofréquence. La mesure est effectuée à l'aide d'un mesureur de champ électrique. La mesure indique un champ électrique d'amplitude crête de 10 V/m.



1. Déterminez la densité de puissance crête et moyenne transportée par l'onde électromagnétique.

2. Les recommandations européennes d'exposition du public aux champs électromagnétiques exigent que les personnes ne soient pas soumises à une densité de puissance crête $> 2 \text{ W/m}^2$. Que concluez-vous de cette mesure ?

1. On suppose un régime sinusoïdal. La puissance crête transportée par l'énergie électromagnétique est de : $P_{\max} = |E| \times |H|$, la puissance moyenne de $P_{\text{moy}} = 1/2 \times |E| \times |H|$. En supposant que l'onde est plane (mode TEM), ce qui est vrai à une distance suffisamment importante de l'émetteur radiofréquence (condition de champ lointain), les champs électrique et magnétique de l'onde sont en phase et reliés par l'impédance d'onde $\eta = 377 \ \Omega$ dans l'air ou dans le vide : $|E|/|H| = \eta$. La puissance transportée par l'onde mesurée est de :

$$P_{\max} = \frac{|E|^2}{\eta} = \frac{100}{377} = 265 \text{ mW} / \text{m}^2$$

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} P_{\max} = 133 \text{ mW} / \text{m}^2$$

2. La puissance crête transportée par l'onde est environ 10 fois plus faible que la limite prévue par la recommandation d'exposition du public. A priori, il n'y a pas de problèmes légaux liés à l'exposition du public et donc pas de modifications à apporter par le propriétaire de l'émetteur (hormis si le principe de précaution est appliqué).

Exercice 2 – Modèle de ligne

Soit une ligne bifilaire de 1 m de long. Le rayon de chaque brin est de 1 mm et la séparation entre le brin est de 5 mm. Le métal présente une conductivité σ_c de $5.6 \times 10^7 \text{ S/m}$. On suppose que les conducteurs baignent dans un milieu diélectrique de permittivité relative $\epsilon_r = 2.2$, de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$ et de conductivité $\sigma_d = 10^{-6} \text{ S/m}$. On transmet des signaux dont l'occupation fréquentielle est comprise entre 1 et 100 MHz.

1. Calculer l'inductance, la capacité, la résistance et la conductivité linéique de cette ligne.

A partir des formules analytiques vues en cours, on détermine les paramètres linéiques d'une paire bifilaire :

$$l = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right) = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \ln\left(\frac{5}{1} - 1\right) = 277 \text{ nH} / \text{m}$$

$$c = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)} = \frac{\pi \times 2.2 \times 8.85 \times 10^{-12}}{\ln\left(\frac{5}{1} - 1\right)} = 44 \text{ pF} / \text{m}$$

$$r = \frac{1}{\sigma_c} \frac{1}{\pi a^2} = \frac{1}{5.6 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 5.7 \text{ m}\Omega / \text{m}$$

$$g = \frac{\sigma_d}{\epsilon_0 \epsilon_r} C = \frac{10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12} \times 2} \times 44 \times 10^{-12} = 2.8 \text{ }\mu\text{S} / \text{m}$$

2. Déterminer l'impédance caractéristique de la ligne et la vitesse de propagation (on pourra vérifier que la ligne présente des pertes faibles).

Dans le cas général d'une ligne présentant des pertes, l'impédance caractéristique se calcule selon la formule suivante :

$$Z_c = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}$$

Si les pertes (r et g) sont négligeables, alors l'impédance caractéristique se simplifie en

$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}$. Plaçons-nous à la fréquence la plus faible : 1 MHz. A cette fréquence : $j\omega l = j \times 1.74 \gg r$, et $j\omega c = j \times 2.8 \times 10^{-4} \gg g$, donc on peut négliger les pertes. L'impédance caractéristique de la ligne est de 79 Ω .

Dans le cas général d'une ligne présentant des pertes, la constante de propagation se calcule selon la formule suivante : $\gamma = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} = \alpha + j\beta$. Comme les pertes

sont négligeables, la constante de propagation est purement complexe : $\gamma = j\omega\sqrt{lc} = j\frac{\omega}{v}$ où v

est la vitesse de propagation : $v = \frac{1}{\sqrt{lc}} = 2.86 \times 10^8 \text{ m/s}$

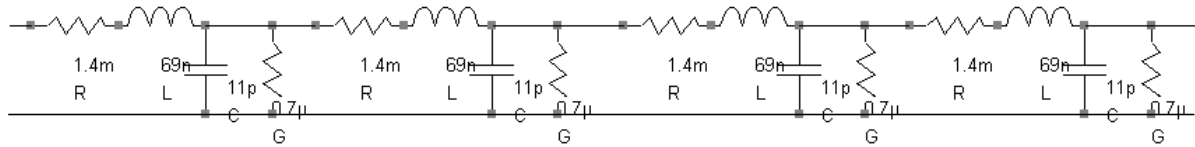
3. En déduire un modèle électrique équivalent pour la ligne.

Le modèle électrique de la ligne doit être valide sur tout le domaine fréquentiel du signal véhiculé. Modéliser un tronçon de ligne par un circuit électrique à base de constantes rlcg localisées supposent que ce tronçon soit électriquement court (longueur faible devant la longueur d'onde). En posant L la longueur de ce tronçon, celui-ci est électriquement court tant que $L < \lambda/10$. Le contenu fréquentiel du signal est limité à 100 MHz. La longueur d'onde la plus courte est donc de : $\lambda = \frac{v}{f} = 2.86 \text{ m}$.

La ligne n'est donc pas électriquement courte, on ne peut donc pas la modéliser par un seul circuit rlcg. Il faut donc la modéliser par des circuits rlcg distribués représentant des tronçons de ligne électriquement courts.

Par exemple, un tronçon de ligne de 25 cm de long est électriquement court jusqu'à 100 MHz. On peut le modéliser par un circuit RLCG, où $R = r \times 25 \text{ cm} = 1.4 \text{ m}\Omega$, $L = 69 \text{ nH}$,

$C = 11 \text{ pF}$ et $G = 0.7 \text{ } \mu\text{S}$. On modélise la ligne entière par 4 circuits RLCG de ce type, comme le montre la figure ci-dessous.



Remarque : comme les pertes restent négligeables, on pourrait supprimer les éléments R et G.

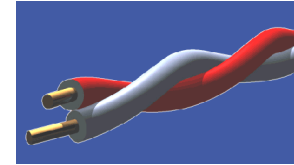
4. On dispose maintenant d'une seconde ligne supposée à faible pertes. Son impédance caractéristique est de $Z_c = 100 \text{ } \Omega$ et la vitesse de propagation de $2.6 \times 10^8 \text{ m/s}$. En déduire l'inductance et la capacité linéique de cette ligne.

Comme les pertes de la ligne restent faibles, l'impédance caractéristique et la vitesse de propagation se calculent selon les formules suivantes : $Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}$ et $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$.

On en déduit : $l = \frac{Z_c}{v} = 385 \text{ nH/m}$ et $c = \frac{1}{v \cdot Z_c} = 38 \text{ pF/m}$

Exercice 3 – Transmission d'un signal sur une paire bifilaire

On considère une ligne bifilaire de longueur $L = 1 \text{ mètre}$ composée de 2 fils de rayon $a = 100 \text{ } \mu\text{m}$ et séparés d'une distance $d = 500 \text{ } \mu\text{m}$ par de l'air. On suppose que les conducteurs sont idéaux. On applique en entrée de la ligne un signal de type échelon d'amplitude 1 V . Le générateur présente une impédance de sortie de $10 \text{ } \Omega$. La ligne est chargée à l'autre extrémité par une résistance de $300 \text{ } \Omega$.

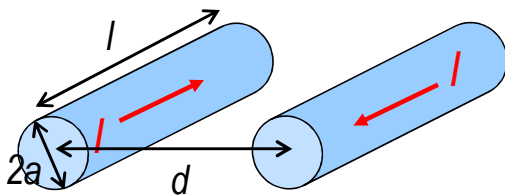


On note $V(0,t)$ et $V(L,t)$ les tensions aux 2 extrémités de la ligne, et $I(0,t)$ et $I(L,t)$ les courants traversant les charges connectées à chaque extrémité de la ligne.

1. Tracer l'évolution dans le temps des tensions $V(0,t)$, $V(L,t)$ et des courants $I(0,t)$ et $I(L,t)$.

Pour cela, on va tracer le diagramme de rebond (Bounce Diagram) pour cette ligne.

On commence par calculer les inductances et capacités linéiques de la ligne. Comme on suppose que la ligne est sans pertes, on ne considère pas la résistance série liée aux pertes ohmiques.



$$L_{lin} = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right) = 555 \text{ nH/m}$$

$$C_{lin} = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)} = 20 \text{ pF/m}, \epsilon_r = 1$$

Remarque : dans le cours, l'inductance linéique d'une paire bifilaire est donnée par :

$$L_{lin} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right). \text{ Il s'agit d'une erreur. La bonne expression est : } L_{lin} = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right).$$

Calcul de l'impédance caractéristique : $Z_C = \sqrt{\frac{L_{lin}}{C_{lin}}} = \sqrt{\frac{555nH/m}{20pF/m}} = 167\Omega$ et de la

vitesse de propagation : $v = \frac{1}{\sqrt{L_{lin} C_{lin}}} = \frac{1}{\sqrt{555nH/m \times 20pF/m}} = 3 \times 10^8 m/s$. Le temps de

propagation est de $T_p = \frac{L}{v} = \frac{1}{3 \times 10^8} = 3.33ns$, le temps d'aller retour est de

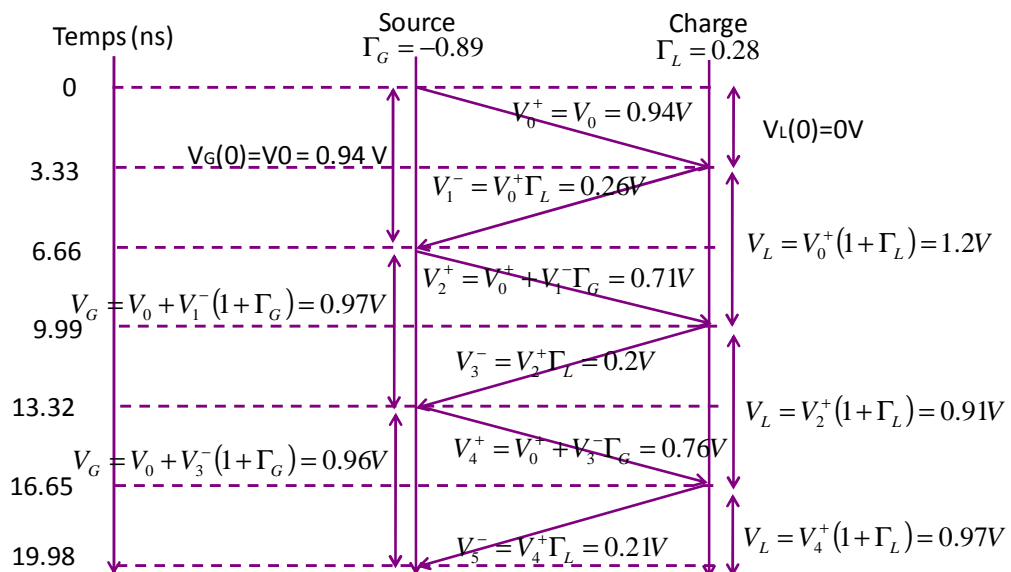
$$T_{AR} = 2T_p = 6.66ns$$

Coefficient de réflexion au niveau de la charge : $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{300 - 167}{300 + 167} = 0.28$

Coefficient de réflexion au niveau de la source : $\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_C}{Z_G + Z_C} = \frac{10 - 167}{10 + 167} = -0.89$

Valeur prise par l'onde incidente à $t = 0$:

$$V(0,t) = V^+\left(t - \frac{0}{v}\right) = \frac{Z_C}{Z_G + Z_C} V_0 = \frac{167}{10 + 167} 1 = 0.94V$$

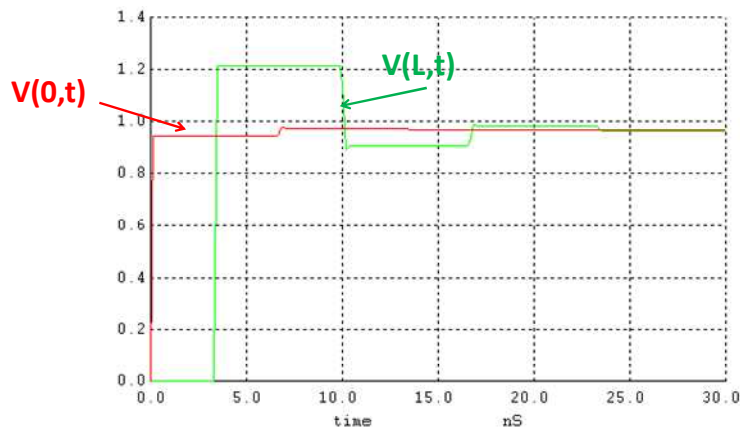


Pour obtenir le courant en entrée de la ligne $I(0,t) = \frac{V(0,t)}{Z_C}$. Pour obtenir le courant en

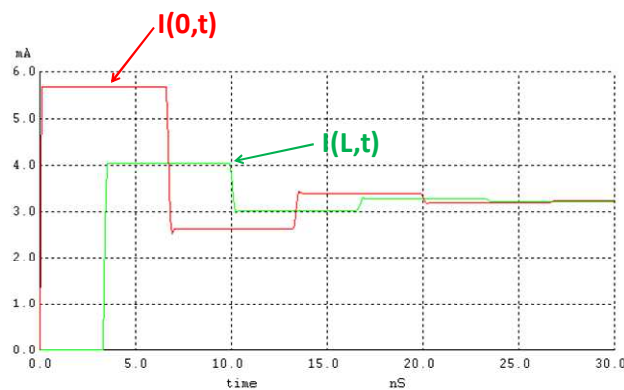
sortie de ligne $I(L,t)$, c'est-à-dire traversant la charge Z_L : $I(L,t) = \frac{V(L,t)}{Z_L}$.

Vérification par une simulation SPICE :

Simulation des tensions :

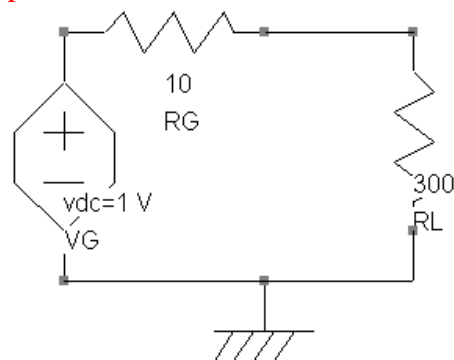


Simulation des courants :



2. Vers quelles valeurs convergent le courant et la tension mesurés à chaque extrémité de la ligne ?

Lorsque $t \rightarrow \infty$, le front incident ne rebondit plus d'une extrémité à l'autre de la ligne (énergie transmise aux charges connectées à chaque extrémité de la ligne), donc la tension et le courant sont constantes en tout point de la ligne. Le régime permanent est atteint. Tout se passe comme si la ligne n'était plus présente. On se retrouve avec le schéma équivalent suivant :



La tension en entrée de la ligne = celle aux bornes de RL. La tension à chaque extrémité de la ligne converge donc vers : $V_{\infty} = \frac{R_L}{R_L + R_G} V_G = 0.968V$. Le courant dans la ligne converge

vers : $I_{\infty} = \frac{V_G}{R_L + R_G} = 3.22mA$, ce qui est confirmé par les résultats de simulation SPICE.

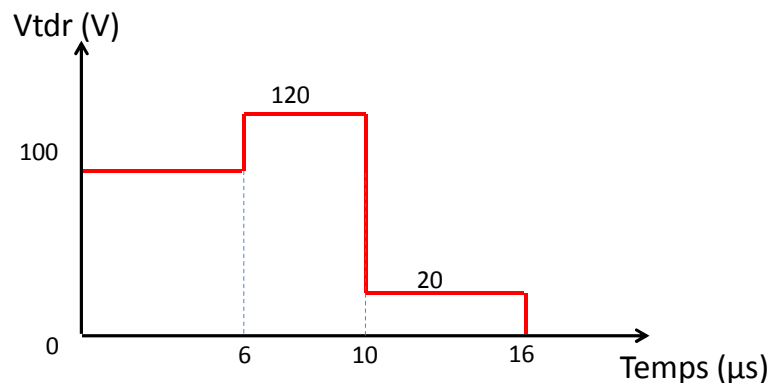
Exercice 4 – Réflectométrie

Un réflectomètre dans le domaine temporel (Time Domain reflectometry TDR) est un instrument de mesure utilisé pour analyser les propriétés des lignes de transmission et localiser des défauts tels que des cassures. Le principe de fonctionnement repose sur l'envoi d'une impulsion brève par le réflectomètre dans la ligne à analyser et l'enregistrement simultané de la tension en sortie du réflectomètre. Celle-ci dépend de l'onde incidente produite par le réflectomètre, mais aussi de la réflexion produite par les ruptures d'impédance de la ligne à analyser.

La tension de circuit ouvert du réflectomètre est une impulsion d'amplitude $V_{co} = 200 \text{ V}$ et de $10 \mu\text{s}$ de largeur. L'impédance de sortie du réflectomètre est $Z_{TDR} = 50 \Omega$.

On souhaite analyser un câble coaxial de longueur inconnue et connectée sur une charge résistive terminale Z_L , elle aussi inconnue. On sait seulement que le câble est adapté $Z_c = 50 \Omega$ et qu'il est constitué d'un isolant de type teflon ($\epsilon_r = 2.1$). On suppose que le câble ne présente pas de défauts.

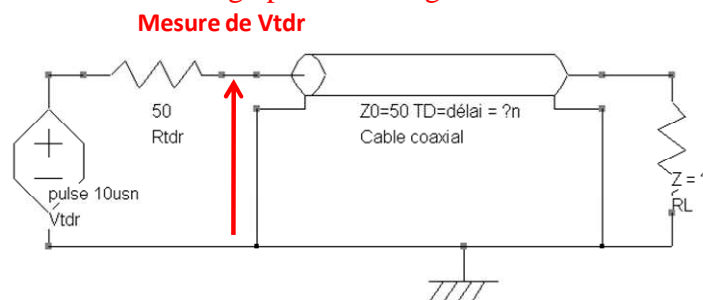
La mesure au réflectomètre de ce câble donne le résultat suivant :



Déterminer la longueur du câble l et l'impédance de la charge terminale Z_L .

On pourra utiliser les expressions indiqués sur le bounce diagram de l'exercice 2 pour déterminer l'expression théorique da tension mesurée en entrée de la ligne.

Pour répondre à ces 2 questions, il suffit de lire le résultat de la mesure du réflectomètre, qui donne le profil de la tension en entrée de la ligne. Le schéma équivalent du TDR connecté au ca^ble de longueur inconnu et chargé par une charge Z_L inconnu est le suivant :



Le réflectomètre est modélisé par un générateur de Thévenin de résistance de sortie = 50 ohms. Le générateur de tension interne produit une impulsion de $10 \mu\text{s}$ de durée et d'amplitude = 200 V.

Commençons par analyser la mesure. Si la charge terminale était adaptée sur l'impédance du câble, la tension mesurée par le TDR serait constante pour une durée = durée du pulse émis + temps d'aller retour dans le câble. Or, ce n'est pas le cas, la tension mesurée varie au bout de $6 \mu\text{s}$, indiquant qu'il y a une rupture d'impédance en bout de ligne (comme le câble ne

présente pas de défaut, il ne peut pas y avoir de ruptures d'impédance en plein milieu de la ligne).

Commençons par déterminer la longueur du câble coaxial. Entre 0 et 6 μs , la tension mesurée par le réflectomètre est constante et = 100 V. La tension initiale en entrée de la ligne est égale

à : $V(0,t) = V^+ \left(t - \frac{0}{v} \right) = \frac{Z_C}{Z_{TDR} + Z_C} V_{CO} = \frac{V_{CO}}{2} = 100V$, puisque il y a adaptation d'impédance

en sortie du réflectomètre. Pendant ces 6 premières μs , le TDR n'enregistre que l'impulsion que le TDR émet. Au bout de 6 μs , la tension change brutalement. Le TDR vient de recevoir le front d'onde réfléchi à l'autre extrémité du câble. Le temps d'aller retour T_{AR} dans le câble est donc de 6 μs . La vitesse de propagation dans le câble est donnée par :

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = 2.069 \times 10^8 \text{ m/s}$, donc la longueur du câble est de :

$$l = \frac{T_{AR}}{2} \times v = 621m$$

Déterminons maintenant la valeur de la charge terminale, à partir de la valeur de la tension mesurée à $t = 6 \mu\text{s}$. Celle-ci est la somme du signal émis par le réflectomètre V_0 et l'onde réfléchi par la charge terminale V_1^- . Celle-ci s'écrit :

$$V_{TDR} = V_0 + V_1^- (1 + \Gamma_G)$$

$$V_1^- = V_0 \times \Gamma_L$$

$$V_0 = \frac{V_{CO}}{2}$$

Le coefficient de réflexion en entrée de la ligne $\Gamma_G = 0$ puisqu'il y a adaptation, donc :

$$V_{TDR} = V_0 + V_1^- = \frac{V_{CO}}{2} (1 + \Gamma_L)$$

$$\Gamma_L = \frac{2V_{TDR}}{V_{CO}} - 1 = \frac{2 \times 120}{200} - 1 = 0.2$$

Le coefficient de réflexion en sortie de ligne = 0.2, l'impédance de charge est donc égale à :

$$Z_L = Z_C \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = 50 \frac{1 + 0.2}{1 - 0.2} = 75\Omega$$

Exercice 5 – Diagnostic d'un bus CAN

Le bus CAN (Controller Area Network – standard IEEE 11898) est un bus numérique industriel largement utilisé pour les applications automobiles. Il est dédié à la communication entre les différents organes de contrôle, capteurs et actionneurs répartis dans un véhicule (il peut connecter jusqu'à 2048 entités). L'information numérique est transportée par un signal différentiel, dont le support physique le plus courant est une paire bifilaire, d'impédance caractéristique $Z_C = 120 \Omega$. Chaque entité connectée au bus présente une impédance d'entrée de 120Ω .

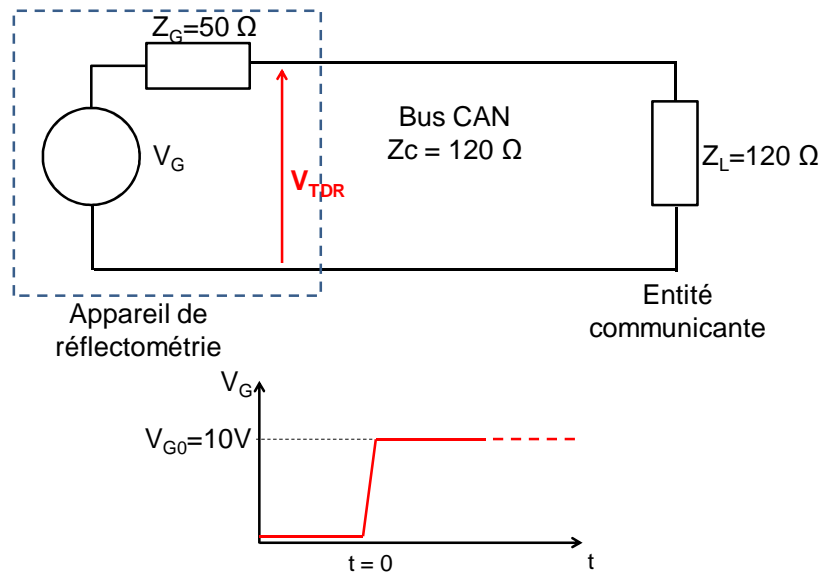
On souhaite diagnostiquer les défauts d'un bus CAN implémenté dans un véhicule, à l'aide d'une méthode basée sur la réflectométrie. On s'intéresse à deux types de défauts :

- Des ruptures de fil, qu'on représentera par un circuit ouvert (impédance infinie)

- Un court-circuit entre les 2 fils du bus (impédance nulle)

La paire bifilaire utilisée pour le bus a une longueur $L = 10$ m, la vitesse de propagation le long du bus v est de 2×10^8 m/s. On suppose que les pertes de la ligne sont négligeables. On suppose que le bus est connecté à une extrémité à l'appareil de réflectométrie (appareil de diagnostic), et à une entité communicante à l'autre extrémité.

L'appareil de réflectométrie employé génère des signaux de type échelon d'amplitude $V_{G0} = 10$ V. On négligera le temps de montée du signal. L'impédance de sortie de l'appareil Z_G est de 50Ω . Celui-ci mesure le profil temporel de tension V_{TDR} en sortie de l'appareil.



1. Pourquoi chaque entité communicante connectée au bus doit présenter une impédance d'entrée de 120Ω ?

Pour assurer une adaptation d'impédance à chaque extrémité du bus, afin d'éviter des réflexions parasites, ce qui induit des délais d'établissement du signal et donc une réduction du débit max. d'information sur le bus.

2. Calculer les coefficients de réflexion Γ_G et Γ_L , en entrée et en sortie du bus. Calculer le temps de propagation T_p d'un signal d'un bout à l'autre du bus.

La charge de sortie étant adaptée sur l'impédance de ligne, $\Gamma_L = 0$. Il n'y a pas de réflexion en bout de ligne.

L'impédance de sortie de l'appareil de réflectométrie est différente de celle du bus, il y a donc

réflexion d'onde en entrée de bus : $\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_C}{Z_G + Z_C} = \frac{50 - 120}{50 + 120} = -0.41$

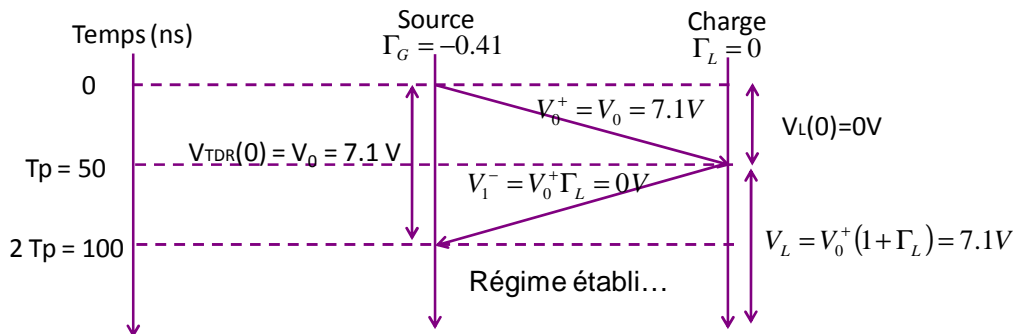
Le temps de propagation d'un bout à l'autre du bus est égal à : $T_p = \frac{L}{v} = \frac{10}{2 \cdot 10^8} = 50ns$

3. On suppose dans un premier temps que le bus ne présente aucun défaut. A l'aide d'un diagramme de bounce, tracer le profil de tension mesuré par l'appareil de réflectométrie.

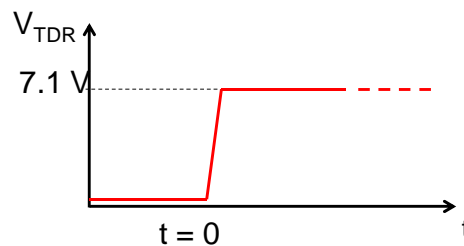
Valeur prise par l'onde incidente à $t = 0$:

$$V_{TDR}(0) = V_0 = \frac{Z_C}{Z_G + Z_C} V_{G0} = \frac{120}{50 + 120} 10 = 7.1V$$

Diagramme de bounce : la charge de sortie étant adaptée, il n'y a pas d'onde réfléchie en bout de ligne. Le régime établi est atteint dans toute la ligne après $T_p = 50$ ns.



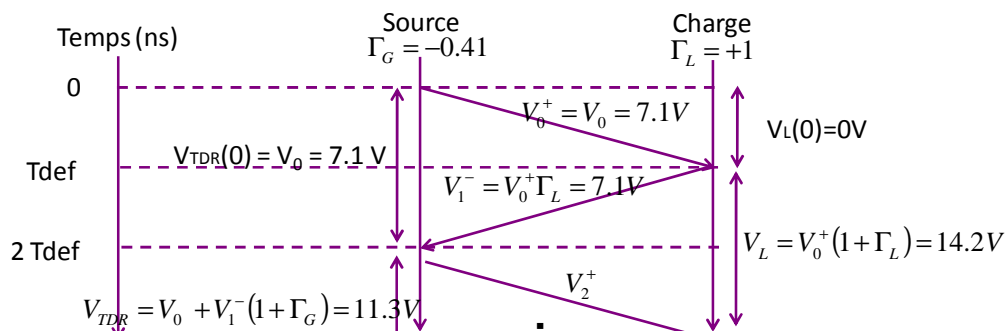
Profil temporel mesuré : le régime établi est obtenu immédiatement après la transmission du front. Aucun événement n'est enregistré par la suite, indiquant qu'aucun défaut (rupture d'impédance) n'est présent le long de la ligne.

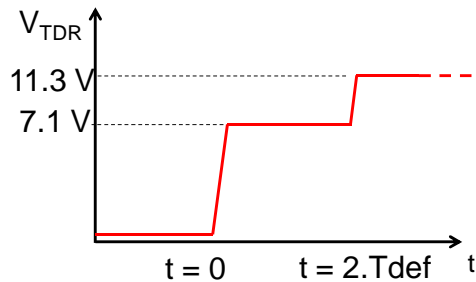


4. On suppose qu'un défaut de type rupture de fil est présent sur le bus. Quel est le modèle électrique équivalent du bus ? A l'aide d'un diagramme de bounce, tracer le profil de tension mesuré par l'appareil de réflectométrie en présence de ce défaut. On appellera T_{def} le temps parcouru par le signal incident pour atteindre le défaut. On pourra arrêter le tracé du profil de tension après $2 \times T_{def}$.

Un défaut de type rupture de fil est une coupure sur un des 2 fils (ou les 2) de la paire bifilaire. On l'assimile à un circuit ouvert. Tout se passe comme si le bus s'arrêtait à l'endroit du défaut et qu'il était terminé par une impédance de charge infinie $Z_L = \infty$. Le coefficient de réflexion en sortie de ligne devient : $\Gamma_L = +1$. L'onde incidente produite par l'appareil de réflectométrie est entièrement réfléchie en bout de ligne et revient en phase vers celui-ci.

Diagramme de bounce : des réflexions d'onde se produisent en entrée et en sortie de ligne tous les T_{def} (temps de parcours entre l'entrée de la ligne et le défaut). Un régime transitoire s'établit en entrée et en sortie, où les tensions oscillent avant d'atteindre le régime permanent. Nous ne représentons la tension d'entrée qu'entre 0 et $2 * T_{def}$. Après $2 * T_{def}$, la tension en entrée augmente, puisque l'onde réfléchie s'additionne avec l'onde incidente, preuve d'un défaut de type haute impédance le long de la ligne. Sa position peut être déduite de la mesure de T_{def} .

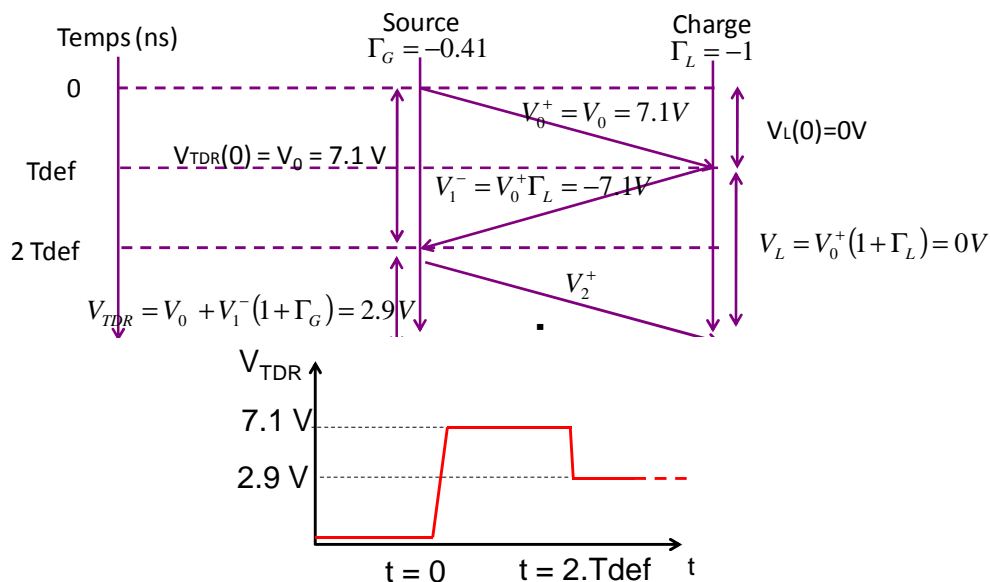




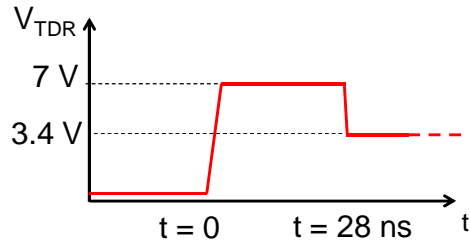
5. On suppose qu'un défaut de type court-circuit est présent sur le bus. Quel est le modèle électrique équivalent du bus ? A l'aide d'un diagramme de bounce, tracer le profil de tension mesuré par l'appareil de réflectométrie en présence de ce défaut. On appellera T_{def} le temps parcouru par le signal incident pour atteindre le défaut. On pourra arrêter le tracé du profil de tension après $2 \times T_{def}$.

Un défaut de type court-circuit est un court-circuit entre les 2 fils de la paire bifilaire. Tout se passe comme si une impédance nulle était placée en parallèle de la charge terminale au niveau du défaut. Tout se passe donc comme si le bus s'arrêtait à l'endroit du défaut et qu'il était terminé par une impédance de charge nulle $Z_L = 0$. Le coefficient de réflexion en sortie de ligne devient : $\Gamma_L = -1$. L'onde incidente produite par l'appareil de réflectométrie est entièrement réfléchi en bout de ligne et revient en opposition de phase vers celui-ci.

Diagramme de bounce : des réflexions d'onde se produisent en entrée et en sortie de ligne tous les T_{def} (temps de parcours entre l'entrée de la ligne et le défaut). Un régime transitoire s'établit en entrée et en sortie, où les tensions oscillent avant d'atteindre le régime permanent. Nous ne représentons la tension d'entrée qu'entre 0 et $2 \times T_{def}$. Après $2 \times T_{def}$, la tension en entrée diminue, puisque l'onde réfléchi se soustraie à l'onde incidente, preuve d'un défaut de type faible impédance le long de la ligne. Sa position peut être déduite de la mesure de T_{def} .



6. On a obtenu le relevé suivant avec un bus. Ce bus est-il défectueux ? Si oui, donnez qualitativement le type de défaut ainsi que sa position.



Le bus est défectueux puisqu'on observe un régime transitoire après l'établissement du front émis par l'appareil de réflectométrie. Par comparaison avec les analyses faites sur des bus présentant deux types de défauts « idéaux », on peut dire que le défaut se rapproche d'un court-circuit, puisque la tension se met à diminuer après l'établissement du front. Cela indique qu'une onde réfléchie en opposition de phase avec l'onde incidente arrive en sur l'appareil de réflectométrie. Le coefficient de réflexion au niveau du défaut est forcément $< 0 \rightarrow$ impédance faible.

L'onde réfléchie arrive après 28 ns à l'appareil de réflectométrie, soit $2 \cdot T_{def} \rightarrow T_{def} = 14$ ns. La position du défaut mesurée depuis l'entrée de la ligne est donc :

$$L_{del} = v \times T_{def} = 2.10^8 \times 14.10^{-9} = 2.8 \text{ m}$$

Exercice 6 – Lignes en $\lambda/4$ – transformateur d'impédance

Une ligne en $\lambda/4$ est une ligne dont la longueur est égale au quart de la longueur d'onde à une fréquence donnée. Le but de cet exercice est de comprendre les propriétés intéressantes de toute ligne de transmission en condition $\lambda/4$ en tant que transformateur d'impédance.

1. Soit une ligne de transmission sans pertes de longueur l d'impédance caractéristique Z_c , chargée par une impédance terminale Z_L . On appelle β la constante de propagation. Déterminer l'expression théorique de l'impédance Z_{in} vue depuis l'entrée de la ligne.

Démonstration de cours :

$$\hat{Z}_{in} = \hat{Z}(0) = Z_c \frac{1 + \hat{\Gamma}(0)}{1 - \hat{\Gamma}(0)}$$

$$\hat{\Gamma}(0) = \Gamma_L e^{-j2\beta l}$$

$$\Rightarrow \hat{Z}_{in} = Z_c \frac{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta l}}$$

L'impédance vue depuis l'entrée de la ligne va varier en fonction de la fréquence (β dépend de la longueur d'onde et donc de la fréquence). En basse fréquence, lorsque $\beta l \ll 1$,

l'expression précédente se simplifie : $\hat{Z}_{in} \approx Z_c \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$, l'effet de la ligne est négligeable.

Cette formule montre l'effet « transformateur d'impédance » d'une ligne de transmission. L'impédance d'entrée correspond à l'impédance de charge, modifiée par un terme de déphasage introduit par la ligne.

Remarque : on aurait aussi pu exprimer l'impédance d'entrée en fonction de l'impédance de charge :

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \tan \beta l}{Z_C + jZ_L \tan \beta l}$$

2. Que devient l'expression précédente si la longueur de la ligne $l = \lambda/4$? Quel est l'effet de la ligne sur l'impédance vue depuis l'entrée de la ligne ?

L'expression précédente peut se simplifier pour certaines valeurs de fréquence ou de longueur de ligne. Par exemple, pour $l = \lambda/4$: $l = \frac{\lambda}{4} \rightarrow 2\beta l = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \pi$, donc le terme de phase se simplifie : $e^{-j2\beta l} = e^{-j\pi} = -1$. L'impédance d'entrée devient :

$$\hat{Z}_{in} = Z_C \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L}$$

L'impédance de charge et le coefficient de réflexion en sortie sont reliés par :

$$\hat{Z}_L = Z_C \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}, \text{ donc :}$$

$$\hat{Z}_{in} = Z_C \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} = \frac{Z_C^2}{Z_L}$$

La ligne en $\lambda/4$ conduit à transformer l'impédance en entrée de la ligne, de telle sorte qu'elle est l'inverse de l'impédance de charge. Si Z_L est une résistance de grande valeur, alors l'impédance vue en entrée de la ligne est une impédance de petite valeur.

3. En condition $\lambda/4$, quelle impédance voit-on en entrée de la ligne si on charge la sortie de la ligne par une capacité C ? Par une inductance L ?

Que se passe-t-il si l'impédance de charge est complexe ? Si il s'agit d'une capacité C par exemple ? $Z_L = \frac{1}{jC\omega}$

En condition $\lambda/4$: $\hat{Z}_{in} = \frac{Z_C^2}{Z_L} = Z_C^2 jC\omega = jL_{eq}\omega \quad \text{où } L_{eq} = Z_C^2 C$

L'impédance d'entrée est équivalente à une inductance de valeur Z_C^2 multipliée par la capacité de charge. On a transformé une capacité en inductance.

Et si on place une charge inductive L : $Z_L = jL\omega$

En condition $\lambda/4$: $\hat{Z}_{in} = \frac{Z_C^2}{Z_L} = \frac{Z_C^2}{jL\omega} = \frac{1}{jC_{eq}\omega} \quad \text{où } C_{eq} = \frac{L}{Z_C^2}$

L'impédance d'entrée est équivalente à une capacité de valeur L divisée par Z_C^2 . On a transformé une inductance en capacité.

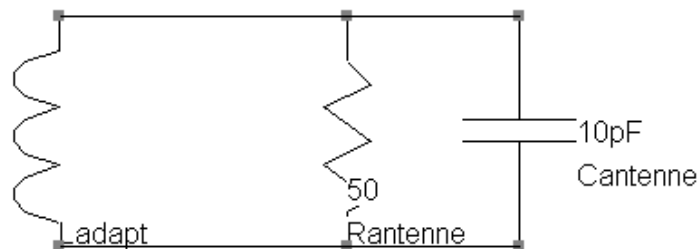
4. On connecte une antenne à un générateur de tension à l'aide d'une ligne microruban d'impédance caractéristique $Z_C = 50 \Omega$. L'impédance de sortie du générateur est aussi $= 50 \Omega$. L'antenne doit émettre à 2 GHz. A cette fréquence, l'antenne est équivalente à une impédance complexe formée par une résistance de 50Ω en parallèle d'une capacité de 10 pF. Que pensez-vous de l'efficacité de transfert de puissance entre le générateur et l'antenne ? Quelle condition faudrait-il assurer pour l'optimiser ?

En cours, nous avons vu qu'un transfert de puissance optimale entre un générateur d'impédance Z_G et une charge Z_L était optimale seulement lorsqu'il y avait adaptation d'impédance ($Z_G = Z_L$). Dans cet exemple, le générateur présente une impédance de 50 ohms, adaptée sur l'impédance caractéristique de la ligne. Par contre, la charge correspondant à l'impédance d'entrée de l'antenne présente une partie réelle mais aussi une partie imaginaire liée à la capacité parasite.

Le transfert de puissance n'est donc pas optimal puisqu'il n'y a pas adaptation d'impédance au niveau de la charge. La seule façon d'optimiser le transfert de puissance est d'annuler la partie imaginaire de l'impédance de la charge. Or, celle-ci est propre à l'antenne, donc il est nécessaire d'ajouter un composant près de l'antenne capable d'annuler l'effet de cette capacité.

5. Montrez qu'en ajoutant une inductance en parallèle de l'antenne il est possible d'optimiser le transfert de puissance à l'antenne à une fréquence donnée. Quelle valeur faudrait-il donner à cette inductance pour optimiser le transfert de puissance à 2 GHz ?

Une solution pour optimiser le transfert de puissance à l'antenne consiste à ajouter entre la ligne et l'antenne un réseau d'adaptation, qui modifie l'impédance de la charge connectée à l'antenne. Ici, le rôle du réseau d'adaptation est d'annuler la partie imaginaire de l'impédance de charge due à l'antenne et s'assurer que la partie réelle de la charge = 50 Ω . La solution consiste à mettre en parallèle de l'antenne une inductance L_{adapt} . La figure ci-dessous présente le modèle équivalent de la charge, avec l'inductance du réseau d'adaptation en parallèle du modèle équivalent de l'antenne. Il s'agit d'un filtre RLC parallèle.



La condition d'adaptation n'est requise qu'à la fréquence de fonctionnement de l'antenne, c'est-à-dire 2 GHz. La valeur de l'inductance du réseau d'adaptation doit être choisie pour faire résonner le filtre LC à 2 GHz. En effet, l'impédance d'un filtre LC parallèle est telle

que : $Z_{L//C} = \frac{jL_{adapt}\omega}{1 - L_{adapt}C_{ant}\omega^2}$. Pour $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{adapt}C_{ant}}}$ appelée fréquence de résonance,

l'impédance de ce filtre devient infinie. Donc l'impédance du filtre RLC parallèle est égale à R à la fréquence de résonance. Choix pour L_{adapt} :

$$L_{adapt} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_{ant}} = \frac{1}{4\pi^2 (2 \times 10^9)^2 \times 10 \times 10^{-12}} = 0.63 nH$$

Une inductance parallèle de 0.63 nH peut servir de réseau d'adaptation à 2 GHz pour cette antenne.

6. En vous basant sur les questions précédentes, comment pourrait-on optimiser le transfert de puissance à l'antenne à l'aide d'un condensateur ? Quelle valeur choisiriez-vous pour ce condensateur ?

Comment réaliser cette inductance ? Une possibilité est de construire une inductance équivalente à partir d'une capacité et d'une ligne quart d'onde. Par exemple, imaginons qu'on

considère des lignes microruban réalisée sur un substrat de $\epsilon_r = 2.1$, d'impédance caractéristique 50 ohms. En utilisant une capacité de 0.25 pF en sortie d'une ligne microruban 50 ohms quart d'onde qui est placée en parallèle de l'antenne et en sortie de la ligne connectant l'antenne au générateur, l'impédance vue depuis l'entrée de la ligne est équivalente à une inductance de 0.63 nH. La longueur de la ligne doit donc être égale à :

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\sqrt{\epsilon_r} f_0} = 2.6 \text{ cm}$$

L'utilisation de lignes microruban comme technique d'adaptation d'impédance est très courante en électronique microondes et hyperfréquence, car très économique et facilement intégrable. L'utilisation de circuits passifs discrets introduit toujours des éléments parasites non négligeables. On appelle « stub » la ligne quart d'onde placée en parallèle de la charge à adapter.

Exercice 7 – Filtre à ligne micro ruban

Une ligne de transmission peut être modélisée à l'aide d'un réseau distribué d'inductances et de capacités. Judicieusement dimensionnée, une ligne peut donc servir de filtre passe-bas, passe-haut ou passe-bande. Le but de cet exercice est de comprendre le principe de base d'un filtre à ligne micro ruban.

1. Soit une ligne micro ruban d'impédance caractéristique Z_c et de longueur l , chargé par une impédance Z_L . Montrer que l'impédance d'entrée de la ligne peut s'écrire :

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_L \tan \beta l}$$

Démonstration :

$$Z_{in} = Z_c \frac{1 + \Gamma(0)}{1 - \Gamma(0)} = Z_c \frac{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta l}} = Z_c \frac{1 + \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{-j2\beta l}}{1 - \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{-j2\beta l}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L (1 + e^{-j2\beta l}) + Z_c (1 - e^{-j2\beta l})}{Z_L (1 - e^{-j2\beta l}) + Z_c (1 + e^{-j2\beta l})}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L e^{-j\beta l} (e^{+j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_c e^{-j\beta l} (e^{+j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_L e^{-j\beta l} (e^{+j\beta l} - e^{-j\beta l}) + Z_c e^{-j\beta l} (e^{+j\beta l} + e^{-j\beta l})}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L \cos \beta l + jZ_c \sin \beta l}{jZ_L \sin \beta l + Z_c \cos \beta l}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_L \tan \beta l}$$

2. Simplifier l'expression précédente dans le cas d'une ligne électriquement courte ($l \ll \lambda$).

Ligne électriquement courte $\rightarrow 1 \ll \lambda \rightarrow \beta l \ll 1 \rightarrow \tan \beta l \approx \beta l$

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \beta l}{Z_C + jZ_L \beta l}$$

3. Dans le cas d'une ligne électriquement courte, calculer l'impédance d'entrée de la ligne en fonction de la fréquence lorsque la ligne est chargée par une faible impédance Z_L tel que : $Z_L \ll Z_C \beta l$? Si $Z_C \ll Z_L \beta l$? Dans les 2 cas, comment se comporte la ligne ?

Premier cas : $Z_L \ll Z_C \beta l$. La charge est très petite devant l'impédance caractéristique de la ligne. L'expression de l'impédance caractéristique de la ligne se simplifie :

$$Z_{in} \approx Z_C \frac{jZ_C \beta l}{Z_C} = jZ_C \beta l = jZ_C \frac{\omega}{v} l$$

$$Z_{in} = jL_{eq} \omega, \quad L_{eq} = \frac{Z_C}{v} l$$

Dans le cas où l'impédance caractéristique de la ligne est grande devant l'impédance de charge, une ligne électriquement courte se comporte comme une inductance L_{eq} . En technologie micro-ruban, il suffit de réduire la largeur de la ligne pour augmenter l'impédance caractéristique et l'inductance équivalente. En utilisant des lignes courtes et étroites, on pourra réaliser des inductances équivalentes localisées.

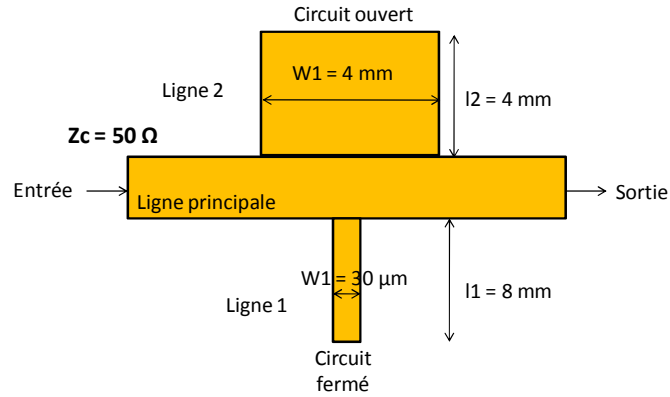
Deuxième cas : $Z_C \ll Z_L \beta l$. La charge est très grande devant l'impédance caractéristique de la ligne. L'expression de l'impédance caractéristique de la ligne se simplifie :

$$Z_{in} \approx Z_C \frac{Z_L}{jZ_L \beta l} = \frac{Z_C}{j\beta l} = \frac{1}{j \frac{l}{vZ_C} \omega}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{jC_{eq} \omega}, \quad C_{eq} = \frac{l}{vZ_C}$$

Dans le cas où l'impédance caractéristique de la ligne est petite devant l'impédance de charge, une ligne électriquement courte se comporte comme une capacité C_{eq} . En technologie micro-ruban, il suffit d'augmenter la largeur de la ligne pour réduire l'impédance caractéristique et augmenter la capacité équivalente. En utilisant des lignes courtes et larges, on pourra réaliser des capacités équivalentes localisées.

4. Soit une ligne micro-ruban adaptée 50 ohms. Celle-ci est réalisée sur un substrat de permittivité électrique relative $\epsilon_r = 4.5$ et d'épaisseur $h = 0.15$ mm. Un générateur de tension d'amplitude interne V_G avec une résistance série R_G de 50 ohms est connecté en entrée de la ligne, alors qu'une charge 50 ohms est connectée sur la sortie. Au milieu de cette ligne principale, deux autres lignes micro ruban appelées ligne 1 et ligne 2 sont connectées en parallèle. La ligne 1 est court-circuitée au plan de masse, alors que la ligne 2 se termine en circuit ouvert (impédance de charge supposée infinie).



a. Vérifiez que les lignes 1 et 2 sont électriquement courtes jusqu'à 2.5 GHz. Jusqu'à 2.5 GHz, les lignes 1 et 2 peuvent être considérées comme électriquement courtes. En effet : $\lambda = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.2} \times 2.5 \times 10^9} = 8.1 \text{ cm}$, donc les longueurs l_1 et l_2 sont $< \lambda/10$ jusqu'à 2.5 GHz.

b. Déterminez les paramètres linéiques de la ligne 1 (on négligera ses pertes). En déduire son impédance caractéristique et la vitesse de propagation de l'onde le long de la ligne.

aRappel formules pour le calcul des inductances et capacités linéiques d'une ligne microruban (on néglige les pertes, donc la résistance ohmique et la conductance de pertes diélectriques sont nulles) :

$$\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + 10 \frac{h}{W} \right)^{-1/2}$$

$$C(F/m) = \frac{2\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0}{\ln\left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h}\right)}$$

$$L(H/m) = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h}\right)$$

Ligne 1 : d'après les dimensions géométriques, on trouve : $L_1 = 738 \text{ nH/m}$ et $C_1 = 45 \text{ pF/mm}$, $Z_{c1} = 128 \Omega$ et $v_1 = 1.73 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

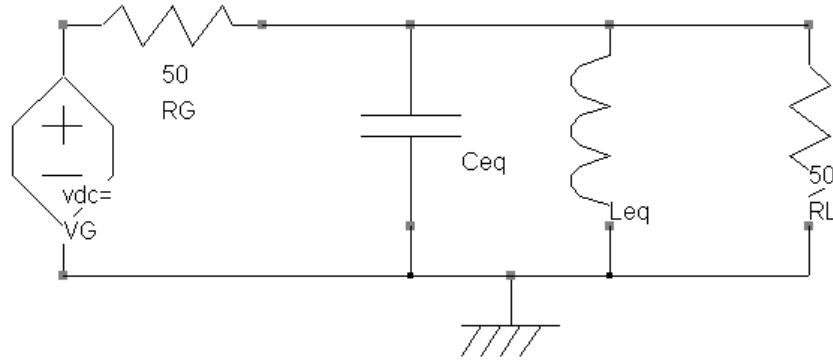
c. En assimilant la ligne 2 comme une capacité plane, déterminez la capacité équivalente représentée par la ligne.

La largeur de la ligne étant largement plus grande que la hauteur par rapport au plan de masse, comme la ligne est électriquement courte, on peut négliger l'inductance de la ligne et la considérer comme une capacité plane. Sa valeur est alors de :

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r W_2 l_2}{h} = 4.2 \text{ pF}$$

d. Construire le modèle électrique équivalent de cette ligne jusqu'à 2.5 GHz, en se basant sur les résultats de la question 3.

Modèle électrique équivalent :



La ligne principale étant parfaitement adaptée à chaque extrémité, tout se passe comme si on pouvait ramener les impédances de sources et de charge au milieu de la ligne.

La ligne 2 est équivalente à une capacité $C_{eq} = 17 \text{ pF}$ jusqu'à 2.5 GHz. Au-delà, la ligne n'est plus électriquement courte et ce modèle n'est plus valable.

La ligne 1 est étroite (Z_{c1} fort) et se termine par un court-circuit \rightarrow impédance de charge nulle. On vérifie donc la relation $Z_L \ll Z_{c1}$. On peut donc assimiler la ligne 1 court-circuitée comme une inductance L_{eq} de valeur :

$$L_{eq} = \frac{Z_{c1}}{v_1} l_1 = \frac{128}{1.73 \times 10^8} \times 0.008 = 5.9 \text{ nH}$$

e. Spécifiez la nature du filtre formé par les lignes 1 et 2, ainsi que la fréquence singulière de ce filtre.

Les lignes 1 et 2 forment donc un filtre LC parallèle jusqu'à 2.5 GHz, qui est de nature passe-bande. A partir du modèle électrique équivalent précédent, soit Z_f l'impédance du filtre LC

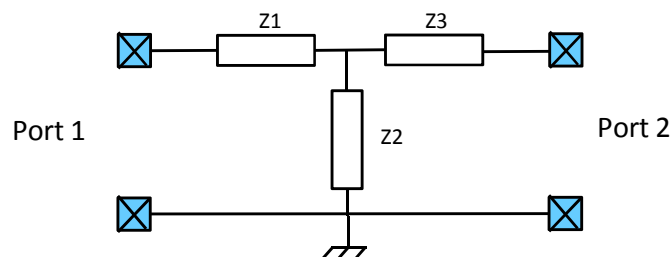
série : $Z_f = \frac{jL_{eq}\omega}{1 - L_{eq}C_{eq}\omega^2}$. L'impédance de ce filtre tend vers l'infini à la fréquence

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{eq}C_{eq}}} = 1.01 \text{ GHz}$. et tend à s'annuler à plus basse et plus haute fréquence. Ce

filtre est un filtre passe bande, centré autour de 1 GHz.

Exercice 8 – Utilisation de la matrice ABCD

1. Soit le circuit en T ci-dessous. Déterminez la matrice ABCD de ce circuit.



$A = V_1/V_2$ si $I_2 = 0$ (port 2 en circuit ouvert) $= 1 + Z_1/Z_2$

$B = -V_1/I_2$ si $V_2 = 0$ (port 2 en court-circuit) $= Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 / Z_2$ (exprimez le courant $-I_2$ qui traverse Z_3 en fonction de I_1 , V_1 en fonction de I_1 , puis V_1 en fonction de $-I_2$)

$C = I_1/V_2$ si $I_2 = 0$ (port 2 en circuit ouvert) = $1/Z_C$

$D = -I_1/I_2$ si $V_2 = 0$ (port 2 en court-circuit) = $1+Z_3/Z_2$

2. En utilisant les matrices ABCD, déterminez l'impédance d'entrée d'une ligne sans pertes, de longueur L et d'impédance caractéristique Z_c , chargée par une impédance notée Z_L . Que se passe-t-il si $Z_L = Z_c$?

La matrice ABCD d'une ligne sans pertes est : $\begin{bmatrix} \cos \beta L & jZ_c \sin \beta L \\ j\frac{1}{Z_c} \sin \beta L & \cos \beta L \end{bmatrix}$. En la chargeant

par une impédance terminale Z_L , tout se passe comme si on plaçait une admittance parallèle

de valeur $Y_L = 1/Z_L$, dont la matrice ABCD se note : $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_L & 1 \end{bmatrix}$. La matrice ABCD

de ces 2 éléments mis en cascade est égale au produit de leurs matrices ABCD respectives. On trouve donc la matrice ABCD suivante pour la ligne chargée :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta L & jZ_c \sin \beta L \\ j\frac{1}{Z_c} \sin \beta L & \cos \beta L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_L & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta L + jZ_c Y_L \sin \beta L & jZ_c \sin \beta L \\ j\frac{1}{Z_c} \sin \beta L + Y_L \cos \beta L & \cos \beta L \end{bmatrix}$$

L'impédance d'entrée de la ligne est le rapport entre la tension en entrée de la ligne sur le courant entrant dans la ligne. La configuration de la ligne est telle qu'elle n'est excitée que d'un côté puisque chargée par une impédance de l'autre. Dans le formalisme de la matrice ABCD, on peut écrire que $I_2 = 0$ (le port 2 est ouvert). L'impédance d'entrée s'écrit donc :

$$Z_{in} = Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{A \times V_2}{C \times V_2} = \frac{A}{C}$$

En développant le calcul, on trouve l'expression vue en cours :

$$Z_{in} = \frac{\cos \beta L + jZ_c Y_L \sin \beta L}{j\frac{1}{Z_c} \sin \beta L + Y_L \cos \beta L} = \frac{1 + j\frac{Z_c}{Z_L} \tan \beta L}{1 + j\frac{Z_L}{Z_c} \tan \beta L} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan \beta L}{Z_c + jZ_L \tan \beta L}$$

Si la ligne est adaptée ($Z_L = Z_C$), alors la matrice devient :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta L + j \sin \beta L & jZ_c \sin \beta L \\ j\frac{1}{Z_c} \sin \beta L + \frac{1}{Z_c} \cos \beta L & \cos \beta L \end{bmatrix}$$

L'impédance d'entrée est alors égale à : $Z_{in} = \frac{A}{C} = Z_c$.

3. Soit ABCD la matrice de la ligne précédente chargée par une impédance quelconque notée Z_L . Celle-ci est excitée par un générateur de tension V_g et d'impédance de sortie Z_g . Exprimez la tension d'entrée en fonction de Z_g , V_g et des paramètres de la matrice. En déduire l'expression de la tension d'entrée si $Z_g = Z_c$.

Comme $I_2 = 0$, on a : $V_1 = A.V_2$ et $I_1 = C.V_2 \rightarrow V_1 = A/C \times I_1$. Le courant I_1 peut se calculer à partir de la différence de potentiel aux bornes de Z_g l'impédance de sortie du générateur : $I_1 = (V_g - V_1)/Z_g$, donc :

$$V_1 = \frac{A}{C \times Z_G + A} V_G$$

En remarquant que $A/C = Z_{in}$ et si $Z_g = Z_c$, l'expression devient : $V_1 = \frac{Z_{in}}{Z_c + Z_{in}} V_G$.

En remplaçant par l'expression de Z_{in} , on obtient :

$$V_1 = V_G \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} \frac{1 + j \frac{Z_C}{Z_L} \tan \beta L}{1 + j \tan \beta L}$$

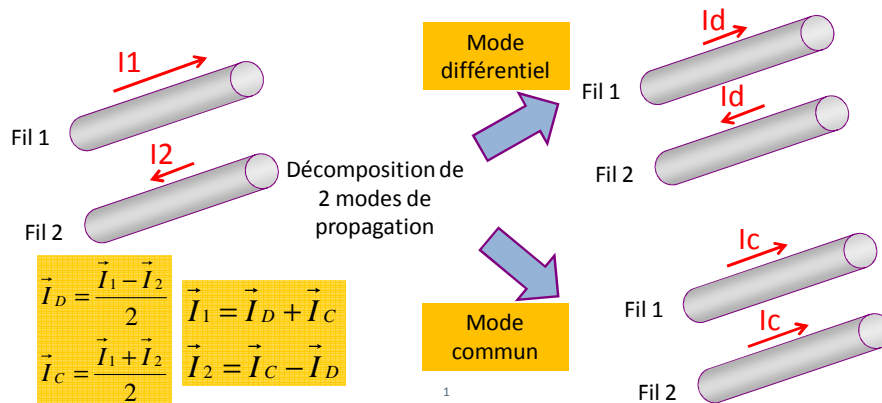
Exercice 9 – Emission rayonnée d'une ligne bifilaire – Mode différentiel vs. mode commun

Une ligne de transmission parcourue par un courant va produire à grande distance une onde électromagnétique. Le but de cet exercice est de déterminer l'expression du champ électrique produit par une ligne bifilaire en champ lointain.

Soit une ligne bifilaire de longueur L et d'impédance caractéristique Z_c . On suppose que la longueur de la ligne est électriquement courte. On suppose aussi que la ligne adaptée. Les 2 brins sont séparés par une distance notée d , largement inférieure à la longueur d'onde.

Nous allons considérer 2 modes de propagation du courant : le mode différentiel et le mode commun. Le mode différentiel est le mode « normal » de fonctionnement d'une ligne de transmission à 2 conducteurs : un des conducteurs est le conducteur aller, l'autre conducteur est l'unique conducteur de retour. Dans le mode commun, le 2^e conducteur devient aussi un conducteur aller (le conducteur retour est alors assuré par un 3^e conducteur, que nous n'identifierons pas). Le courant circule alors dans le même sens dans les 2 conducteurs de la paire bifilaire.

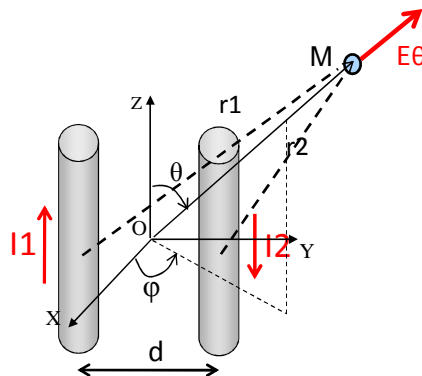
Dans un cas pratique, le courant qui circule dans les différents conducteurs de lignes de transmission résulte de la superposition des modes différentiels et communs. Nous allons voir que les courants de mode différentiel et de mode commun n'ont pas le même impact sur l'émission rayonnée.



1. Connaissant l'amplitude du courant sur un des brins de la ligne, pourquoi peut-on utiliser l'approximation du dipôle élémentaire pour calculer le champ électrique produit en champ lointain par ce brin ?

L'approximation du dipôle élémentaire donne les champs électriques et magnétiques produits par un fil électriquement court, connaissant le courant qui circule. Cette approximation suppose que le courant (sinusoïdal) est constant sur toute la ligne. Nous supposons que la ligne bifilaire est électriquement courte ($L \ll \lambda$), donc le courant est quasi-constant sur toute la longueur de la ligne. On peut donc utiliser l'approximation du dipôle élémentaire pour calculer le champ électromagnétique produit par la paire bifilaire en sommant les contributions des 2 brins de la ligne.

2. En utilisant le repère géométrique ci-dessous centré sur le point O, déterminez l'expression théorique du champ électrique en champ lointain. On note I_1 et I_2 les courants circulant sur chacun des 2 brins de la paire bifilaire.



a. On place un point d'observation M à grande distance de la paire bifilaire ($r \gg d$ et $r \gg L$). Déterminez une expression du champ électrique en M en fonction des courants I_1 et I_2 , ainsi que des distances r_1 et r_2 entre M et le centre de chaque brin.

Rappel de cours : champ électrique produit par un dipôle élémentaire (électriquement court) parcouru par un courant I_0 en champ lointain :

$$\vec{E}_\theta \approx \frac{\eta\beta^2 I_0 h}{4\pi} \sin\theta \frac{j}{\beta r} e^{-j\beta r}$$

Le champ électrique au point M résulte de la contribution des 2 brins :

$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_{\theta_1} + \vec{E}_{\theta_2}$$

$$\vec{E}_\theta = j \frac{\eta\beta I_1 L}{4\pi} \sin\theta_1 \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} + j \frac{\eta\beta I_2 L}{4\pi} \sin\theta_2 \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2}$$

Puisque r est très grand devant les dimensions de la ligne, on peut dire que $1/r_1 \approx 1/r_2 \approx 1/r$ et $\sin\theta_1 \approx \sin\theta_2 \approx \sin\theta$. Cependant, puisqu'il s'agit de 2 termes de phase, on ne peut pas dire que $e^{-j\beta r_1} \approx e^{-j\beta r_2}$. L'expression peut donc s'écrire :

$$\vec{E}_\theta = j \frac{\eta\beta L}{4\pi r} \sin\theta \left(I_1 e^{-j\beta r_1} + I_2 e^{-j\beta r_2} \right)$$

b. En notant r la distance entre le point O et le point M, montrez que : $r_1 = r + \Delta$ et $r_2 = r - \Delta$. Précisez la valeur de Δ . Exprimez le champ électrique en fonction de r et Δ .

En plaçant le repère au centre de la paire bifilaire, on peut montrer que $r_1 = r + \Delta$ et $r_2 = r - \Delta$, où 2Δ représente la différence de marche entre les contributions des 2 brins. Même si ces 2 brins sont quasiment à la même distance du point d'observation (si $d \ll r$), il existe une différence de phase entre ces 2 contributions au point M.

Géométriquement, on peut montrer que cette différence de marche est égale à :

$$\Delta = \frac{1}{2} d \sin \theta \sin \varphi .$$

L'expression du champ électrique devient alors :

$$\vec{E}_\theta = j \frac{\eta \beta L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} (I_1 e^{-j\beta \Delta} + I_2 e^{+j\beta \Delta})$$

3. On considère qu'un courant différentiel I_d circule sur les 2 conducteurs. Donnez l'expression théorique du champ électrique au point M en fonction de la fréquence, en supposant que $d \ll \lambda$. Dans quelle direction le champ est-il maximal ? Montrez que le champ peut s'écrire dans cette direction sous la forme : $E_{\max} = K_d L d f^2 / r I_d$, où K_d est une constante à préciser.

On ne considère qu'un courant différentiel I_d , donc $I_1 = -I_2 = I_d$. L'expression du champ électrique de mode différentiel (lié à l'existence seul du courant de mode différentiel) devient donc :

$$\vec{E}_D = j \frac{\eta \beta L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} I_D (e^{-j\beta \Delta} - e^{j\beta \Delta})$$

$$\vec{E}_D = j \frac{\eta \beta L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} I_D \times \left(-2j \sin \left(\frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right) \right)$$

Puisque $d \ll \lambda$, $\beta d \ll 1$, donc $\sin \left(\frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right) \approx \frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi$. L'expression du champ électrique de mode différentiel devient :

$$\vec{E}_D = \frac{\pi \eta L d f^2}{c^2 r} I_D \sin^2 \theta \sin \varphi e^{-j\beta r}$$

$$|E_D| = 1.316 \cdot 10^{-14} \frac{L d f^2}{r} I_D \sin^2 \theta \sin \varphi$$

Le rayonnement électromagnétique est maximal pour $\theta = \pi/2$ et $\varphi = \pi/2$, c'est-à-dire dans le plan des 2 fils. Dans le plan d'antisymétrie des 2 fils ($\varphi = 0$ ou π), M est à égale distance des 2 fils qui sont parcourus par des courants égaux en amplitude mais de sens opposés, donc les contributions des 2 fils s'annulent. On voit que le champ électrique décroît en $1/r$ (normal puisque nous sommes en champ lointain), augmente avec le carré de la fréquence, dépend de la surface représentée par les 2 fils ($L \times d$), et est proportionnel à une constante $K_d = 1.316 \times 10^{-14}$.

4. On considère maintenant qu'un courant de mode commun I_c circule sur les 2 conducteurs. Donnez l'expression théorique du champ électrique au point M en fonction de la fréquence f . Dans quelle direction le champ est-il maximal ? Montrez que le champ peut s'écrire dans cette direction sous la forme : $E_{\max} = K_c L f / r I_c$, où K_c est une constante à préciser.

On ne considère qu'un courant de mode commun, donc $I_1 = I_2 = I_c$. L'expression du champ électrique de mode commun (lié à l'existence seul du courant de mode commun) devient donc :

$$\vec{E}_c = j \frac{\eta \beta L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} I_c (e^{-j\beta d} + e^{j\beta d})$$

$$\vec{E}_c = j \frac{\eta \beta L}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} I_c \times \left(2 \cos \left(\frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right) \right)$$

Puisque $d \ll \lambda$, $\beta d \ll 1$, donc $\cos \left(\frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right) \approx 1$. L'expression du champ électrique de mode commun devient :

$$\vec{E}_c = \frac{\eta}{c} \frac{L \cdot f}{r} I_c \sin^2 \theta e^{-j\beta r}$$

$$|E_c| = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{L \cdot f}{r} I_c \sin^2 \theta$$

Le rayonnement électromagnétique est maximal pour $\theta = \pi/2$ et indépendant de φ . En effet, quelque soit φ , les contributions des 2 brins, qui sont parcourus par les mêmes courants, ne se compensent pas. On voit que le champ électrique décroît en $1/r$ (normal puisque nous sommes en champ lointain), augmente avec la fréquence, dépend de la longueur des 2 fils, et est proportionnel à une constante $K_c = 1.257 \times 10^{-6}$, bien plus grande que K_d .

5. Soit une ligne bifilaire de longueur $L = 50$ cm, les 2 brins sont séparés d'une distance $d = 1$ cm. Jusqu'à quelle fréquence l'approximation que nous avons faite sera exacte ? Calculez l'amplitude des champs électriques maximum à 1 m produit par un courant de mode différentiel, puis par un courant de mode commun. Pour une amplitude de courant donné, conclure sur l'effet de chacun de ces 2 modes.

Les calculs effectués sont exacts tant que $L \ll \lambda$, soit le critère suivant : $L < \lambda/10$. Dans l'air ou dans le vide, $\lambda = c/f$, donc l'approximation est exacte tant que $f < c/(10 \cdot L) = 60$ MHz. A 60 MHz, le champ électrique différentiel maximal est de : $|E_D|_{\max} = 0.47 I_D$ tandis que le champ électrique de mode commun maximal est de : $|E_C|_{\max} = 0.75 I_C$.

A amplitude de courant donné, on voit que jusqu'à 60 MHz le champ électrique de mode commun est plus important que le champ électrique de mode différentiel. Le courant de mode commun est à l'origine de nombreux problèmes de CEM en raison de cette propriété. La résolution des problèmes d'émission rayonnée parasite passe en grande partie par une réduction des courants de mode commun.

Exercice 10 – Emission rayonnée d'une ligne longue

Cet exercice étant la suite de l'exercice 9, il est conseillé de faire ce dernier avant

On considère une paire bifilaire de longueur L sans pertes, qu'on ne suppose plus électriquement courte. La séparation entre les 2 brins est notée d . Celle-ci est supposée très petite devant la longueur d'onde. On suppose que la ligne est parfaitement adaptée et sans pertes. On note β_L la constante de propagation de l'onde le long de la ligne, et β_0 la constante de propagation de l'onde en espace libre

On considère que le courant qui circule sur la ligne est purement différentiel. On considère aussi un courant sinusoïdal d'amplitude I_0 . La ligne est orientée le long de l'axe Z, les positions le long de la ligne sont repérées à partir d'une origine placée au centre de la ligne (positions comprises entre $-L/2$ et $+L/2$).

1. Quel est l'expression du courant différentiel circulant le long de la ligne, en fonction de la position z sur la ligne.

La ligne étant parfaitement adaptée, l'amplitude du courant est constante le long de toute la ligne. Cependant, sa phase varie le long de la ligne car celle-ci n'est plus électriquement courte. En considérant une excitation sinusoïdale, la ligne étant sans pertes, il convient d'ajouter au courant le terme de déphasage le long de la ligne $\exp(-j\beta_l z)$. Cependant, on repère les positions de la ligne à partir d'une origine placée au centre de la ligne, donc z est compris entre $-L/2$ et $+L/2$. Si on place l'origine des phases au centre de la ligne ($z = 0$), l'expression du courant le long de la ligne devient : $I_D(z) = I_0 \exp(-j\beta_l z)$, $z \in \left[-\frac{L}{2}; +\frac{L}{2}\right]$

2. Etablir l'expression du champ électrique différentiel dE_D en champ lointain produit par un tronçon de ligne électriquement court, de longueur noté dz .

dE_D est la contribution au champ électrique rayonné par un tronçon de ligne électriquement court de longueur dz . En reprenant les résultats de l'exercice 9, on a montré que le champ électrique de mode différentiel produit à une grande distance r_i par une ligne bifilaire électriquement courte de longueur dL dont les 2 brins sont séparés par une distance $d \ll \lambda$ est de :

$$d\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} \frac{dz \cdot d \cdot f^2}{r_i} I_D \sin^2 \theta \sin \varphi e^{-j\beta_0 r_i}$$

Ce tronçon étant placé à une abscisse z , on peut introduire l'expression du courant à l'abscisse z , ainsi que l'expression de r_i en fonction de r (distance entre le point de mesure et le centre de la ligne) : $r_i = r - z \cos \theta$. Il est possible de considérer que $r_i \approx r$ dans le terme $1/r$ si r est très grand devant L , mais pas dans le terme de phase $\exp(-j\beta r)$.

Le champ électrique devient :

$$d\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} \frac{dz \cdot d \cdot f^2}{r} I_0 e^{-j\beta_l z} \sin^2 \theta \sin \varphi e^{-j\beta_0 (r - z \cos \theta)}$$

3. En déduire l'expression du champ électrique différentiel E_D en champ lointain produit par toute la ligne. Vérifiez que l'on retrouve l'expression du champ électrique différentiel d'une ligne courte, déterminée à la question 3 de l'exercice 9.

Pour déterminer le champ électrique total au point M placé en champ lointain, il faut intégrer la contribution de chaque tronçon de ligne :

$$E_D = \int_{-L/2}^{+L/2} dE_D$$

$$\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} d \cdot f^2 I_0 \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-j\beta_l z} \sin^2 \theta \sin \varphi \frac{e^{-j\beta_0 (r - z \cos \theta)}}{r} dz$$

En supposant que r est suffisamment grand devant L , on peut considérer que les variables r , θ et φ ne dépendent pas de l'abscisse z du tronçon considéré :

$$\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} d \cdot f^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} I_0 \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-j(\beta_1 + \beta_0 \cos \theta)z} dz$$

$$\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} d \cdot f^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} I_0 \frac{j}{\beta_1 + \beta_0 \cos \theta} \left(e^{-j(\beta_1 + \beta_0 \cos \theta) \frac{L}{2}} - e^{+j(\beta_1 + \beta_0 \cos \theta) \frac{L}{2}} \right)$$

$$\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} d \cdot f^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} \frac{2I_0}{(\beta_1 + \beta_0 \cos \theta)} \sin \left((\beta_1 + \beta_0 \cos \theta) \frac{L}{2} \right)$$

Dans le cas d'une ligne électriquement courte, $\beta_1 L/2 \ll 1$ donc l'expression précédente se simplifie et donne le même résultat que celui de l'exercice précédent :

$$\vec{E}_D = \frac{\pi\eta}{c^2} d \cdot f^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} I_0 L$$

4. Pour quelle(s) fréquence(s) le rayonnement en champ lointain produit par la ligne présente-il des maxima ? des minima ?

On va considérer le champ dans la direction $\theta = \pi/2$ et $\varphi = \pi/2$.

Le rayonnement produit par la ligne dépend de nombreux paramètres, tels que la fréquence. Elle intervient directement par le terme f^2 , mais aussi dans la constante de propagation $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f/v_1$, où v_1 est la vitesse de propagation de l'onde le long de la ligne. Le terme $\sin(\beta_1 L/2) = \sin(\pi f L/v_1)$ présente donc une périodicité en fonction de la fréquence, avec des maxima à chaque fois que le terme à l'intérieur du sinus est égal à $\pi/2 + k\pi$, où k est un entier. Le champ électrique passera par un maximum à chaque fois que la longueur de la ligne est

égale à un multiple de la moitié de la longueur d'onde : $L = \frac{\lambda_1}{2} + k \cdot \lambda_1, k \in \mathbb{N}$

De même le champ électrique passera par un minimum à chaque fois que la longueur de la ligne est égale à un multiple de la longueur d'onde : $L = k \cdot \lambda_1, k \in \mathbb{N}$

En effet, lorsque la longueur de la ligne est égale à la longueur de la ligne, de part et d'autre de la ligne, on trouve des courants de même amplitude mais opposés en phase, dont les contributions vont s'annuler à grande distance.

Exercice 11 – Antenne de mesure

On souhaite mesurer le champ électrique à 900 MHz en utilisant un dipôle demi-onde. On suppose que l'on est en conditions de champ lointain et en espace libre. L'impédance d'onde est celle du vide.

1. Quelle longueur donneriez-vous au dipôle ? Quelle est sa surface équivalente ?

Il vaut mieux l'utiliser autour de sa fréquence de résonance (dipôle demi-onde) :

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f_{res} \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 9 \cdot 10^8 \times 1} = 16.7 \text{ cm}$$

Le gain d'un dipôle demi-onde est de 1.64.

On se place en conditions champ lointain. A la fréquence de résonance, la surface équivalente de l'antenne est :

$$S_{eq} = \frac{G\lambda^2}{4\pi} = \frac{1.64 \times 0.33^2}{4\pi} = 0.0145 \text{ m}^2$$

Ce chiffre correspond à la surface sur laquelle la puissance de l'onde interceptée est égale à la puissance captée par l'antenne.

2. Calculer la valeur théorique de son facteur d'antenne, en considérant que le récepteur présente une impédance d'entrée de 50Ω ? Si la tension mesurée aux bornes de l'antenne est de 1 V , quelle est l'amplitude du champ électrique incident ? Et celle du champ magnétique associé ?

On suppose que la résistance d'entrée du récepteur connectée à l'antenne est égale à 50 ohms .

$$AF = \frac{E}{V} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{4\pi\eta_0}{G_R \cdot R_R}} = \frac{1}{0.3} \sqrt{\frac{4\pi \times 377}{1.64 \times 50}} = 25.3 \text{ m}^{-1}$$

Lorsque la tension mesurée aux bornes de l'antenne est de 1 V , alors le champ électrique incident est de 25 V/m . En champ lointain et en espace libre, l'onde électromagnétique est en mode TEM, donc les champs E et H sont en phase et reliés par l'impédance d'onde. L'amplitude du champ magnétique est donc de :

$$|H| = \frac{|E|}{\eta_0} = \frac{25.3}{377} = 0.067 \text{ A/m}$$

3. Après caractérisation de cette antenne, on obtient les données suivantes :

- efficacité $\eta = 95 \%$
- coefficient de réflexion en entrée $\Gamma = 0.1$ (en considérant une impédance caractéristique de 50Ω)

La mesure sur une charge 50 ohms donne une puissance de $0.1 \mu\text{W}$. Quelle est la valeur du champ électrique incident ?

Le récepteur mesure une puissance $P_R = 0.1 \mu\text{W}$. Cette puissance n'est pas tout à fait égale à la puissance rayonnée transportée par l'onde incidente, car l'antenne présente des pertes. L'efficacité est liée aux pertes ohmiques de l'antenne. Une efficacité de 95% signifie que 5% de la puissance induite par le rayonnement P_{rad} est perdue en dissipation thermique. En appelant P_A la puissance électrique en sortie de l'antenne :

$$\eta = \frac{P_A}{P_{\text{Rad}}} = 0.95$$

Le coefficient de réflexion n'étant pas rigoureusement nul (l'impédance de l'antenne de mesure n'est pas tout à fait égale à 50Ω), des pertes par désadaptation existent en sortie d'antenne de mesure. La puissance reçue P_R par le récepteur s'exprime en fonction de la puissance en sortie de l'antenne :

$$P_A = P_R (1 - |\Gamma|^2)$$

La puissance induite par le couplage de l'onde incidente sur l'antenne de réception est donc de :

$$P_{\text{Rad}} = \frac{P_R}{\eta(1 - |\Gamma|^2)} = \frac{1 \times 10^{-7}}{0.95 \times (1 - 0.091^2)} = 1.06 \times 10^{-7} \text{ W} = 0.106 \mu\text{W}$$

Sachant que le récepteur est équivalent à une résistance 50 ohms en entrée, la tension en entrée du récepteur est de :

$$V_R = \sqrt{P_{\text{Rad}} \times R_R} = 2.3 \text{ mV}$$

En utilisant la notion de facteur d'antenne, on peut en déduire le champ électrique incident :

$$E = AF \times V_R = 25 \times 0.0023 = 58.2 \text{ mV/m}$$

Exercice 12 – Antenne isotrope

Soit une antenne isotrope parfaitement adaptée et sans pertes. On la fait fonctionner à une fréquence $F = 1 \text{ GHz}$. On lui fournit une puissance électrique moyenne de 100 mW .

1. En champ lointain, quel est le gain de cette antenne ? (la réponse à cette question ne nécessite aucun calcul).

Puisqu'elle est isotrope, la directivité de cette antenne est égale à 1. En effet, la directivité compare le rayonnement d'une antenne par rapport à une antenne de référence : une antenne isotrope. Puisque l'antenne ne présente pas de pertes, le gain est égal à la directivité.

1. On se place à une distance $R = 10 \text{ m}$ de l'antenne. Est-on dans la région de champ proche ou de champ lointain de l'antenne ?

A 1 GHz et dans le vide (ou l'air), la longueur d'onde est de : $\lambda = \frac{c}{f} = 0.3 \text{ m}$. Pour une antenne électriquement courte, la limite entre la zone de champ proche et celle de champ lointain est donnée par $\frac{\lambda}{2\pi} = 5 \text{ cm}$. Excepté si l'antenne est très longue (distance inférieure à $\frac{D^2}{\lambda}$), en se plaçant à 10 m , on est certain d'être en zone de champ lointain. L'onde électromagnétique produite par l'antenne peut être considérée comme plane.

2. Calculez la densité de puissance de l'onde électromagnétique produite par l'antenne à une distance $R = 10 \text{ m}$.

Il s'agit d'une antenne isotrope, elle rayonne donc de manière uniforme dans toutes les directions de l'espace. En considérant une sphère centrée sur l'antenne et de rayon $R = 10 \text{ m}$, en supposant la condition de champ lointain, la densité de puissance transportée par l'onde électromagnétique produite par l'antenne est de :

$$P_{\text{Ray}} = \frac{P_A}{4\pi R^2} = \frac{0.1}{4\pi \times 10^2} = 0.08 \text{ mW} / \text{m}^2$$

3. Calculez l'amplitude du champ électrique à 10 m de cette antenne.

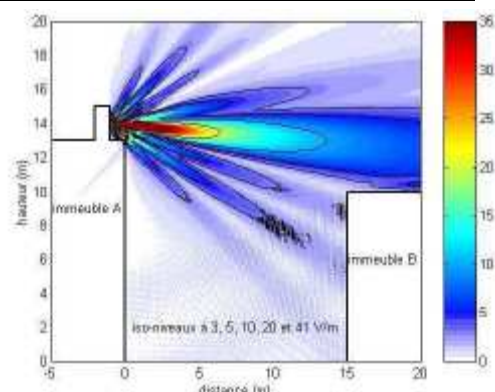
Pour une antenne isotrope, la relation entre la puissance électrique moyenne et le champ électrique est donnée par : $E = \frac{\sqrt{60 \cdot P_A}}{R} = \frac{\sqrt{60 \times 0.1}}{10} = 245 \text{ mV} / \text{m}$

Exercice 13 – Périmètre de sécurité autour d'une station de base UMTS

Une station de base UMTS est placée sur le toit d'un immeuble. Le gain de l'antenne est de 60 en face avant de l'antenne. La puissance d'émission crête est de 20 W sur une bande située autour de 2100 MHz .

La figure ci-contre présente une simulation du rayonnement produit par ce type d'antenne. Elle montre qu'un immeuble voisin peut recevoir un champ électrique important.

Cependant, la législation européenne exige qu'à



cette fréquence, le public ne soit pas exposé à un champ électrique supérieur à 61 V/m, et que le personnel habilité ne soit pas exposé à plus de 137 V/m.

www.anfr.fr

1. Déterminez le périmètre de sécurité en face de l'antenne pour le public.

Le rayonnement de l'antenne est maximal en face avant, où son gain atteint 60. Il s'agit d'une antenne très directive. En supposant qu'on se situe en champ lointain (à 2100 MHz, la longueur d'onde est de 14 cm. Une antenne panneau de station de base peut mesurer un peu plus d'une mètre. On sera en champ lointain à un peu plus de 1 mètre de l'antenne), la densité de puissance rayonnée dans cette direction à une distance r est de :

$$P_{ray} = \frac{P_{Ae} G_e}{4\pi r^2}$$

En supposant un espace libre dans l'air, la densité de puissance rayonnée et le champ électrique sont reliés par : $P_{ray} = \frac{E^2}{\eta_0}$, $\eta_0 = 377 \Omega$. Le champ électrique en fonction de la distance se calcule donc :

$$E = \sqrt{\frac{\eta_0 P_{Ae} G_e}{4\pi r^2}}$$

$$E < E_{max} = 61 \text{ V/m, donc : } r \geq \sqrt{\frac{\eta_0 P_{Ae} G_e}{4\pi E_{max}^2}} = 3.1 \text{ m}$$

2. A quelle distance peut s'approcher une personne habilitée de l'antenne ?

Même calcul mais $E_{max} = 137 \text{ V/m} \rightarrow r > 1.4 \text{ m}$

Exercice 14 – Récupération d'énergie d'un émetteur radio

On souhaite récupérer l'énergie rayonnée par une station de base GSM afin d'alimenter plusieurs capteurs d'environnement. Le système de récupération d'énergie dispose d'une antenne de réception d'un gain de 1.5. Elle est accordée à 930 MHz, la fréquence d'un canal GSM sur lequel la station de base émet. On suppose que le rendement de l'antenne est égal à 0.85.

La station de base émet une puissance moyenne de 10 W à l'aide d'une antenne présentant un gain de 60. On suppose que l'antenne de réception du capteur est placée à 5 mètres de l'antenne émettrice, dans la direction de son lobe principal.

Déterminez la puissance électrique moyenne qu'on est susceptible de récupérer.

Dans cet exercice, on suppose que le signal transmis est un signal sinusoïdal à émission fixe (l'antenne émet continuellement) et de puissance constante (l'amplitude ne varie jamais, ce qui en pratique est réaliste). A 930 MHz, la longueur d'onde est égal à 32 cm en espace libre. Si en plus la distance de séparation entre les 2 antennes est supérieure à la taille de l'antenne émettrice, on pourra supposer que l'antenne de réception est placée en champ lointain et qu'elle capte une onde plane.

A 5 m de distance, en condition de champ lointain, la densité de puissance moyenne

transportée par l'onde issue de la station de base est : $P_{ray} = \frac{P_{Ae} G_e}{4\pi r^2} = \frac{10 \times 60}{4\pi \times 25} = 1.9 \text{ W} / \text{m}^2$.

La surface équivalente de l'antenne de réception est de : $S_{eq} = \frac{G_R \lambda^2}{4\pi} = \frac{1.5 \times 0.32^2}{4\pi} = 0.012 m^2$.

La puissance électromagnétique que peut capter l'antenne est donc de : $P_{ray} \times S_{eq} = 24 mW$.

Le rendement η de l'antenne traduit les pertes liées à l'antenne \rightarrow une partie de l'énergie couplée est dissipée. La puissance électrique moyenne qu'on est susceptible de récupérer est donc de : $\eta \times P_{ray} \times S_{eq} = 20 mW$.

En utilisant la formule de Friis et en tenant compte du rendement, on aurait pu directement calculer la puissance électrique récupérée :

$$P_{rec} = \eta \frac{P_{Ae} G_e G_r}{\left(4\pi \frac{r}{\lambda}\right)^2} = 0.85 \frac{10 \times 60 \times 1.5}{\left(4\pi \times \frac{5}{0.32}\right)^2} = 20 mW$$