Signal et Filtrage - Corrections des exercices

Alexandre Boyer, Pascal Acco, Léa Cot, Etienne Sicard

Septembre 2019

Signal & Filtrage

2 IMACS
2019 - 2020
alexandre.boyer@insa-toulouse.fr page Moodle

Chapitre 1

Chapitre 2

L'étude de la réponse des systèmes linéaires à temps invariant

Chapitre 3

Transformée de Laplace

Chapitre 4

Filtrage

Chapitre 5

Séries de Fourier - Analyse fréquentielle des signaux périodiques

Exercice 1

1. On dispose du tracé des spectres en amplitude de deux signaux électriques e(t) et s(t), mesurés respectivement en entrée et en sortie d'un filtre linéaire, passif, à temps invariant (figure 5.1). On note E(f) le spectre du signal d'entrée et S(f) celui du signal de sortie. Repérez toutes les aberrations présentes sur les spectres.

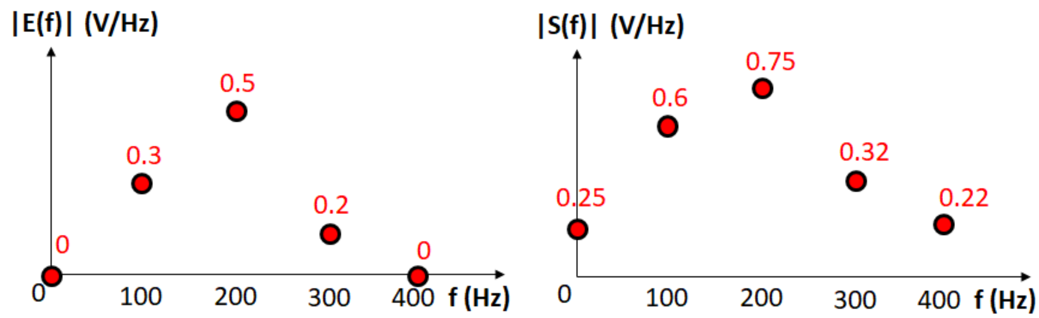


FIGURE 5.1 – Exercice 1 - 1

2. Soit deux signaux périodiques s_1 et s_2, dont on donne les spectres en amplitude et en phase (figure 5.2). Le signal s_3 est issu de l'addition de ces deux signaux. Déterminez la puissance moyenne du signal s_3.

3. On considère le signal périodique x(t), de période T_0, dont l'allure est présentée ci-dessous. Sans calcul, indiquez la ou les formes possibles pour la décomposition en série de Fourier de x(t) :

a. $x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{k\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (cos(k\frac{\pi}{4}) - cos(k\frac{3\pi}{4}))cos(k\omega_0 t)$

b. $x(t) = \frac{2A}{k\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (cos(k\frac{\pi}{4}) - cos(k\frac{3\pi}{4}))sin(k\omega_0 t)$

c. $x(t) = \frac{2A}{k\pi T_0} \sum_{k=1}^{+\infty} (cos(k\frac{\pi}{4}) - cos(k\frac{3\pi}{4}))sin(k\omega_0 t)$

d. $\frac{2}{k\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (cos(k\frac{\pi}{4}) - cos(k\frac{3\pi}{4}))cos(k\omega_0 t)$

<u>Correction exercice 1</u>

1. Liste des aberrations :
— L'unité de l'axe des ordonnées : en V et non pas en V/Hz car il s'agit d'un spectre de raies.
— Le signal de sortie contient une composante continue, alors que le signal d'entrée n'en contient pas. Le système n'est donc pas linéaire.

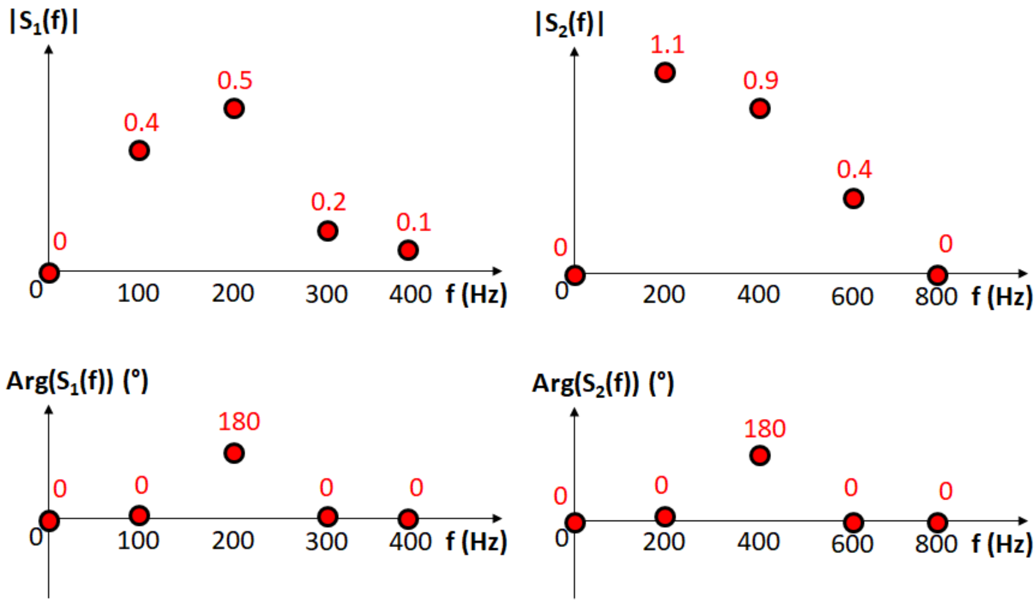


FIGURE 5.2 – Exercice 1 - 2

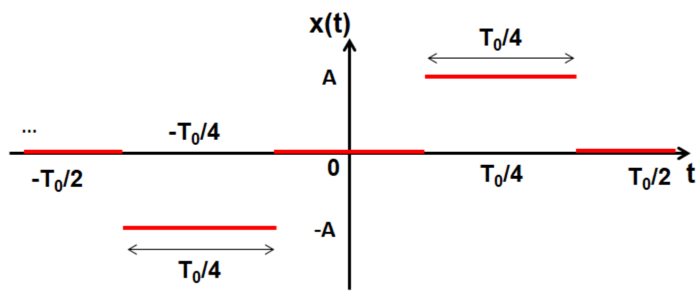


FIGURE 5.3 – Exercice 1 - 3

- Le signal de sortie contient une raie à 400 Hz, alors que le signal d'entrée n'en contient pas. Le système n'est donc pas linéaire puisque de nouvelles composantes fréquentielles sont ajoutées.
- A partir du théorème de Parseval, on peut calculer la puissance moyenne des signaux en entrée et en sortie. La puissance moyenne du signal d'entrée est égale à 0.76 W alors que celle du signal de sortie vaut 2.21 W. Le système n'est donc pas passif.

Le tracé des harmoniques de rang négatif n'est pas précisé. Il est possible que l'amplitude des raies de rang positif ait été doublé pour ne pas représenter les raies de rangs négatif. Si ce n'est pas le cas, ce serait aussi une aberration.

2. En appliquant le théorème de Parseval, on peut calculer la puissance moyenne du signal s_3. Cependant, il faut d'abord déterminer son spectre d'amplitude, en additionnant les amplitude complexes des raies des signaux s_1 et s_2. Il faut donc tenir compte de la phase des raies. De plus, seules les raies de même fréquence peuvent s'additionner. Tracé du spectre du signal s_3 : On en déduit la puissance moyenne du signal S_3 : $P_3 = 2 \times (0.4^2 + 0.6^2 + 0.2^2 + 0.8^2 + 0.4^2) = 2.72W$.

3. Seule la décomposition b est correcte. On peut, par analyse de la forme de la fonction x(t) exclure les trois autres décompositions :

- a. la fonction étant impaire, tous les coefficients associés aux cosinus s'annulent, donc cette forme

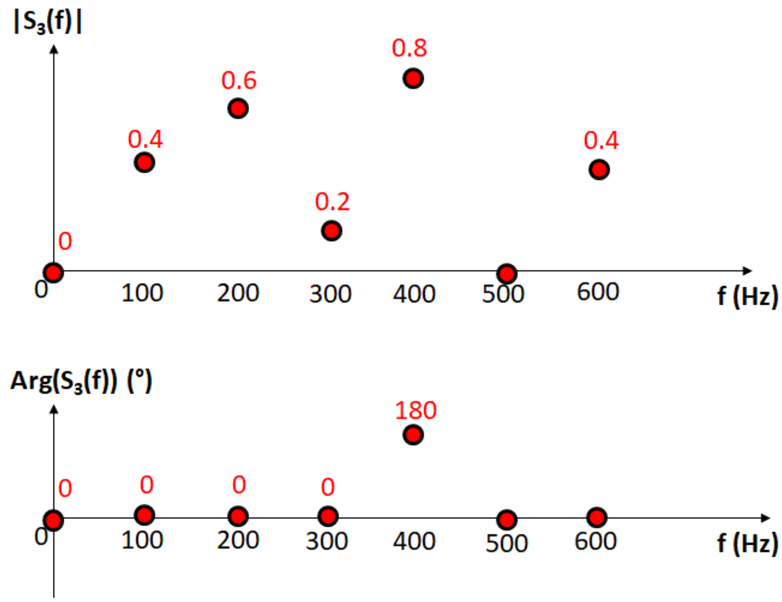


FIGURE 5.4 – Correction Exercice 1 - 2

est erronée. De plus, elle présente une composante continue non nulle.
- c. Les coefficients ont une dépendance à la période T_0, ce qui n'est pas possible. Seule un dépendance au rang k doit être observé.
- d. Comme pour a, les termes devant les cosinus devraient être nuls. De plus, la dépendance à l'amplitude A a disparu.

Exercice 2

Développez en série de Fourier la fonction $f(t) = |sin(\alpha t)|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ donné.

Correction exercice 2

Cette fonction a une période $T_0 = \frac{\pi}{\alpha}$.

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} sin(\alpha t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2jT_0}\int_0^{T_0}(e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t})e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$C_k = \frac{1}{2jT_0}[\frac{1}{j(\alpha - k\omega_0)}(e^{j(\alpha-k\omega_0)T_0} - 1) + \frac{1}{j(\alpha + k\omega_0)}(e^{j(\alpha+k\omega_0)T_0} - 1)]$$

$$C_k = \frac{-1}{2T_0}[\frac{1}{\alpha(1-2k)}(e^{j\pi(1-2k)} - 1) + \frac{1}{\alpha(1+2k)}(e^{j\pi(1+2k)} - 1)]$$

$$C_k = \frac{-1}{2\alpha T_0(1-4k^2)}[(1+2k)(e^{j\pi(1-2k)} - 1) + (1-2k)(e^{j\pi(1+2k)} - 1)]$$

$$C_k = \frac{-1}{2\alpha T_0(1-4k^2)}[e^{j\pi(1-2k)} - 1 + 2ke^{j\pi(1-2k)} - 2k + e^{j\pi(1+2k)} - 1 - 2ke^{j\pi(1+2k)} + 2k]$$

$$C_k = \frac{-1}{2\alpha T_0(1-4k^2)}[e^{j\pi}(e^{-j2k\pi} + e^{j2k\pi}) + 2ke^{j\pi}(e^{-j2k\pi} - e^{j2k\pi}) - 2]$$

$$C_k = \frac{-1}{2\pi(1-4k^2)}[-2cos(2k\pi) + j4ksin(2k\pi) - 2] = \frac{1}{\pi(1-4k^2)}[cos(2k\pi) + 1 - j2ksin(2k\pi)]$$

Or, $cos(2k\pi) = 1$ et $sin(2k\pi) = 0 \forall k \in \mathbb{R}$, donc :

$$C_k = \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \tag{5.1}$$

On en déduit aussi les coefficients de Fourier sous leur forme trigonométrique :

$$A_k = 2Re[C_k] = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$$

$$B_k = 2Im[C_k] = 0$$

Exercice 3

Développez en série de Fourier la fonction périodique x(t) présentée ci-dessous. On donnera l'expression des coefficients sous leurs formes trigonométriques et complexes.
Même question pour la fonction y(t).

<u>Correction exercice 3</u>

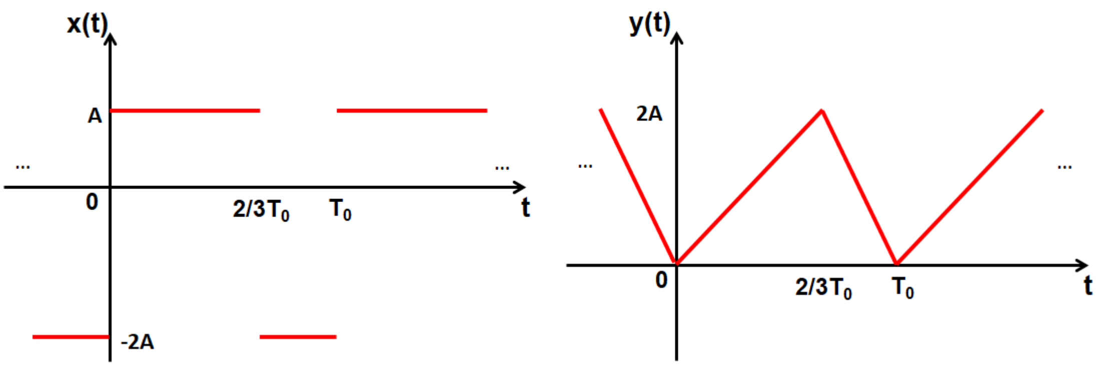


Figure 5.5 – Exercice 3

Commençons par calculer les coefficients de Fourier associés à x(t) sous leur forme trigonométrique. Il n'y a aucune symétrie exploitable pour réduire le nombre de coefficients à calculer.
Forme trigonométrique : $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k cos(k\omega_0 t) + b_k sin(k\omega_0 t))$
<u>Composante continue :</u>

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = 0$$

<u>Termes a_k, k > 0 :</u>

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)cos(k\omega_0 t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}(\int_0^{\frac{2T_0}{3}} Acos(k\omega_0 t)dt - \int_{\frac{2T_0}{3}}^{T_0} 2Acos(k\omega_0 t)dt)$$

$$a_k = \frac{A}{k\pi}([sin(k\omega_0 t)]_0^{2T_0/3} - 2[sin(k\omega_0 t)]_{2T_0/3}^{T_0})$$

$$a_k = \frac{3A}{k\pi}sin(k\frac{4\pi}{3})$$

<u>Termes b_k, k > 0 :</u>

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin(k\omega_0 t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}(\int_0^{\frac{2T_0}{3}} Asin(k\omega_0 t)dt - \int_{\frac{2T_0}{3}}^{T_0} Asin(k\omega_0 t)dt)$$

$$b_k = \frac{-A}{k\pi}([cos(k\omega_0 t)]_0^{2T_0/3} - 2[cos(k\omega_0 t)]_{2T_0/3}^{T_0})$$

$$b_k = \frac{-3A}{k\pi}(cos(k\frac{4\pi}{3}) - 1)$$

On peut en déduire les coefficients de la forme exponentielle : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k exp(-jk\omega_0 t)$:

$$c_0 = a_0 = 0$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{3A}{2k\pi}(sin(k\frac{4\pi}{3}) + j(cos(k\frac{4\pi}{3}) - 1)) \ , \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

La décomposition en série de Fourier de y(t) pourrait se faire par le même calcul direct des coefficients a_k et b_k. Cependant, on peut s'épargner des calculs fastidieux en remarquant que y(t) est le résultat d'une intégration de la fonction x(t). Le propriété d'intégration des coefficients de Fourier peut donc être appliquée pour calculer les coefficients de Fourier de la fonction y(t). Nous les noterons a_k^y et b_k^y pour la forme trigonométrique, et c_k^y pour la forme exponentielle.
La relation entre y(t) et x(t) est donnée par :

$$y(t) = \frac{3}{T0}\int_0^t x(u)du$$

On peut en déduire la relation suivante entre les coefficients complexes des fonctions x(t) et y(t) :

$$c_k^y = \frac{3}{T0}\frac{c_k}{jk\omega_0} \quad k \neq 0$$

$$c_k^y = \frac{-j9A}{4k^2\pi^2}(sin(k\frac{4\pi}{3}) + j(cos(k\frac{4\pi}{3}) - 1)) \ , \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

On peut en déduire les coefficients de Fourier sous leur forme trignométrique :

$$a_k^y = 2.Re[c_k^y] = \frac{9A}{2k^2\pi^2}(cos(k\frac{4\pi}{3}) - 1) \ , \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$b_k^y = -2.Im[c_k^y] = \frac{9A}{2k^2\pi^2}sin(k\frac{4\pi}{3}) \ , \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Il nous reste la composante continue à calculer. Celle-ci ne pouvait être déduire de la décomposition en série de Fourier de x(t) à cause de la relation intégrale entre x et y.

$$a_0^y = c_0^y = \frac{1}{T_0}y(t)dt = \frac{1}{T_0}T_0 \times 2A = A$$

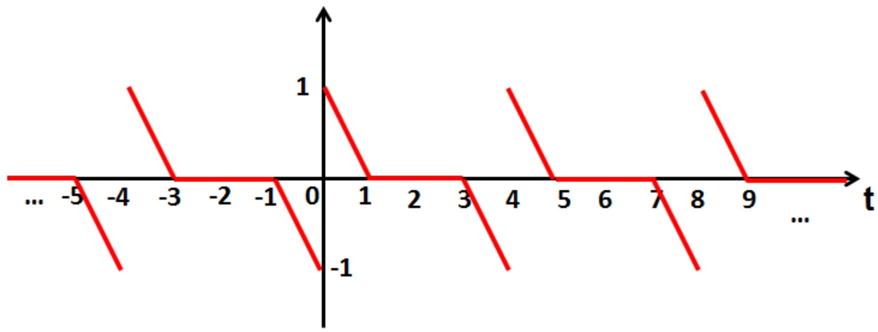
Exercice 4

Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 4, impaire, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t \quad si\ t \ \in [0;1[\\ 0 \quad si\ t \ \in [1;2[\end{cases}$$

1. Dessinez le graphe de f. Calculer f(7), f($\frac{9}{2}$) et $f(\frac{11}{2})$.

2. Calculez les coefficients de Fourier de f.



Correction exercice 2

1. Tracé de la fonction f : on a une information précise sur le tracé de la courbe sur une 1/2 période, entre 0 et 2. Mais comme la fonction est impaire, la fonction présente une symétrie centrale par rapport à 0.

f(7) = 0, f($\frac{9}{2}$)=0.5 et $f(\frac{11}{2}) = 0$

2. La fonction étant impaire, tous les coefficients A_k s'annulent et $C_k = -C_{-k}$. Calculons les coefficients de Fourier sous la forme trigonométrique, avec $T_0 = 4$:

$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_0^1 (1-t)sin(k\omega_0 t)dt + \frac{2}{T_0}\int_3^4 (3-t)sin(k\omega_0 t)dt$$

On peut se rendre compte de l'égalité suivante : $\int_0^1(1-t)sin(k\omega_0 t)dt = \int_3^4(3-t)sin(k\omega_0 t)dt$. L'équation précédente devient :

$$B_k = \frac{4}{T_0}\int_0^1 (1-t)sin(k\omega_0 t)dt = \int_0^1 (1-t)sin(k\omega_0 t)dt$$

$$B_k = \int_0^1 sin(k\omega_0 t)dt - \int_0^1 t \cdot sin(k\omega_0 t)dt$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi}(1 - cos(\frac{k\pi}{2})) - (-\frac{2}{k\pi}(cos(\frac{k\pi}{2}) - \frac{2}{k\pi}sin(\frac{k\pi}{2})))$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi}(1 - \frac{2}{k\pi}sin(\frac{k\pi}{2}))$$

On en déduit l'expression des coefficients de Fourier sous la forme complexe :

$$C_k = -j\frac{B_k}{2} = -j\frac{1}{k\pi}(1 - \frac{2}{k\pi}sin(\frac{k\pi}{2}))$$

On vérifie bien la symétrie des coefficients complexes : $C_k = -C_{-k}$.

Exercice 5

Cet exercice est en relation avec l'exemple d'un signal rectangulaire présenté dans le cours. On considère un signal de même nature, de moyenne nulle, de période T_1, de fréquence f_1 et d'amplitude 2, représenté par la fonction périodique s. On s'intéresse au produit scalaire de la fonction s avec les fonctions de base $cos(n\omega_1 t)$, n = 1, 2 et 3 où $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. La figure ci-dessous représente sur la première ligne, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction s superposé à celui de la fonction $cos(\omega_1 t)$ et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire $s(t)cos(\omega_1 t)$ sur une période T_1. Sur la deuxième ligne sont représentés, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction s superposé à celui de la fonction $cos(2\omega_1 t)$ et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire $s(t)cos(2\omega_1 t)$ sur une période T_1. Sur la troisième ligne sont représentés, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction s superposé à celui de la fonction $cos(3\omega_1 t)$ et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire $s(t)cos(3\omega_1 t)$ sur une période T_1.

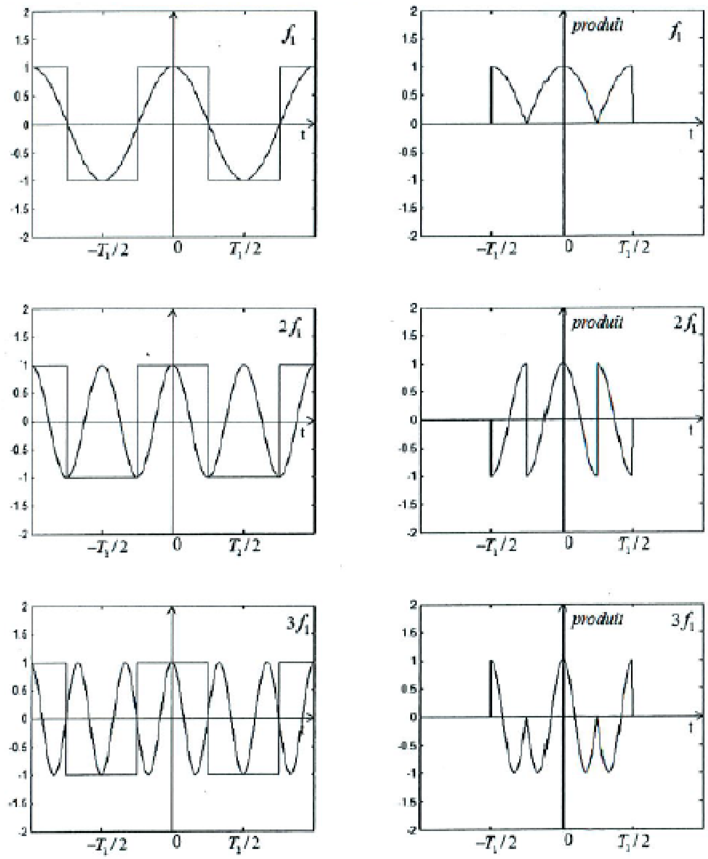


FIGURE 5.6 – Colonne de gauche : graphe de s et de $cos(\omega_1 t)$, $cos(2\omega_1 t)$, $cos(3\omega_1 t)$ - Colonne de droite : graphes de $s(t)cos(\omega_1 t)$, $s(t)cos(2\omega_1 t)$ et $s(t)cos(3\omega_1 t)$.

1. Définir la fonction s.
2. Que représente le produit scalaire de s par une fonction de base $cos(n\omega_1 t)$, n = 1, 2 ou 3 ?
3. Interpréter qualitativement (sans calcul) les trois produits scalaires représentés sur la figure 5.6 en donnant leur signe et une indication de leur valeur algébrique.
4. A quel résultat (sans calcul) peut-on s'attendre si on effectue le produit scalaire de s par les fonctions de bases $sin(n\omega_1 t)$, n = 1, 2 ou 3 ? ?
5. En considérant le signal s comme un signal retardé par rapport au signal étudié en cours et en utilisant les résultats établis dans le cours, calculer les coefficients de Fourier exponentiels de s. Donner la série de Fourier associée à s.

Correction exercice 5

On rappelle que, d'après l'exemple vu en cours, les coefficients de Fourier pour la fonction s(t) ont pour expressions :

$$A_k = \frac{2}{k\pi}(1 - cos(k\pi))$$

$$B_k = 0$$

A_k s'annule pour les rangs k pairs. Ces deux propriétés sont les conséquences de la parité de la fonction et de sa symétrie demi-onde.

2. Ce produit scalaire représente l'aire sous la courbe de la fonction $s(t)cos(n\omega_1 t)$.

3. Le coefficient de Fourier noté A_k dans sa forme trigonométrique. On remarque que le produit de s(t) par $cos(2\omega_1 t)$ présente une aire sous la courbe nulle, contrairement aux produit de s(t) avec $cos(\omega_1 t)$ et $cos(3\omega_1 t)$. Cette constatation confirme le résultat vu plus haut : les coefficients A_k s'annulent pour les rangs k pairs.

4. Les produits scalaires entre s(t) et $sin(n\omega_1 t)$ représentent les coefficients de Fourier B_k. On peut s'attendre qu'ils s'annulent tous, quel que soit le rang, étant donné la propriété de symétrie de s(t).

5. $C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} = \frac{1}{k\pi}(1 - cos(k\pi))$

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0 ;1] de $\mathbb{R}$ par f(t) = t. On considère f comme la restriction de fonctions g_i avec i = 1, 2 ou 3, périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On se propose de déterminer plusieurs expressions de f sur]0 ;1[à partir du développement en séries de Fourier des fonctions g_i.

1. On considère la fonction g_1, périodique, de période $T_1 = 3$, définie par $\forall t \in [0;3[\ \ g_1(t) = t$.
a. Représentez la fonction g_1 sur l'intervalle [-3 ;6].
b. Calculez les coefficients de Fourier de g_1 et donnez la série de Fourier S_1 associée à g_1.
c. Etudiez la convergence de S_1.
d. En déduire le développement en série de Fourier de f sur]0 ;1[.

2. On considère la fonction g_2, impaire, périodique, de période $T_2 = 2$, définie par $\forall t \in [0;1[\ \ g_2(t) = t$.
a. Représentez la fonction g_2 sur l'intervalle [-3 ;3].
b. Calculez les coefficients de Fourier de g_2 et donnes la série de Fourier S_2 associée à g_2.
c. Etudiez la convergence de S_2.
d. En déduire le développement en série de Fourier de f sur]0 ;1[.

3. On considère la fonction g_3, paire, périodique, de période $T_3 = 2$, définie par $\forall t \in [0;1[\ \ g_3(t) = t$.
a. Représentez la fonction g_3 sur l'intervalle [-4 ;4].
b. Calculez les coefficients de Fourier de g_3 et donnes la série de Fourier S_3 associée à g_3.
c. Etudiez la convergence de S_3.
d. En déduire le développement en série de Fourier de f sur]0 ;1[.

Correction exercice 6

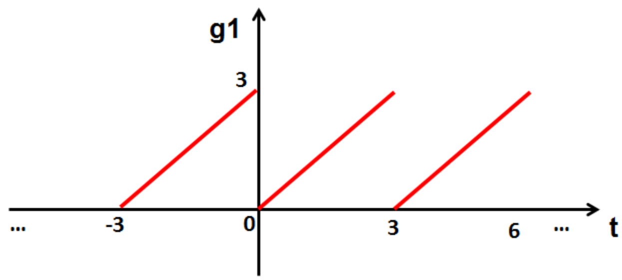
1.a. Tracé de la fonction $g_1(t)$:
b. On a $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ et pour $k \neq 0$:

$$C_k = \frac{1}{3}\int_0^3 te^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{j3}{k2\pi} + \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{j3}{k2\pi}$$

On en déduit les formes trigonométriques :

$$A_k = 0$$

$$B_k = \frac{-3}{k\pi}$$



Pour k = 0 :

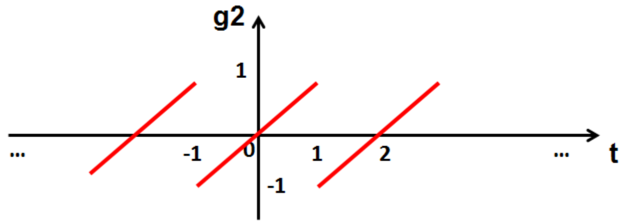
$$C_0 = A_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 tdt = \frac{3}{2}$$

c. La fonction g_1 est de classe C1 et continue par morceaux. Toutes les discontinuités sont de première espèce, donc le développement en série de Fourier converge partout. Pour tous les multiples de 3, le développement converge vers $\frac{3}{2}$.

d. Sur l'intervalle [0 ;1[, la fonction f(t) peut être développée selon la série suivante :

$$\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-3}{k\pi} sin(k\frac{2\pi}{3}t)$$

2.a. Tracé de la fonction $g_2(t)$:



b. On a $T_0 = 2$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. La fonction étant impaire, tous les termes A_k sont nuls. On peut se limiter à calculer les termes B_k pour $k > 0$.

$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_{-1}^{+1} t.sin(k\omega_0 t)dt = \int_{-1}^{+1} t.sin(k\pi t)dt$$

Comme les fonctions t et $sin(k\pi t)$ sont impaires, la fonction égale à leur produit devient paire donc on peut écrire :

$$B_k = 2\int_0^{+1} t.sin(k\pi t)dt = 2[\frac{-t}{k\pi}cos(k\pi t)]_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 cos(k\pi t)dt$$

$$B_k = \frac{-2}{k\pi}cos(k\pi) + \frac{2}{(k\pi)^2}sin(k\pi)$$

$$B_k = \frac{-2}{k\pi}(-1)^k$$

On en déduit l'expression des coefficients complexes :

$$C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} = \frac{(-1)^k}{k\pi}\forall k \in \mathbb{Z}^*$$

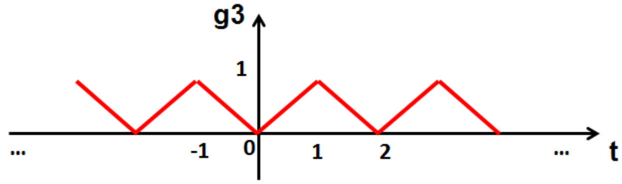
$$C_0 = 0$$

c. La fonction g_2 est de classe C1 et continue par morceaux. Toutes les discontinuités sont de première espèce, donc le développement en série de Fourier converge partout. Au niveau des discontinuités, le développement converge vers 0.

d. La fonction f(t) peut être développée selon la série suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{k\pi}(-1)^k sin(k\pi t)$$

3.a. Tracé de la fonction $g_3(t)$:



b. On a $T_0 = 2$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. La fonction étant paire, tous les termes B_k sont nuls. On peut se limiter à calculer les termes A_k. On démontre facilement que le terme $A_0 = \frac{1}{2}$. Pour les coefficients de rang k > 0 :

$$A_k = \frac{2}{T_0}\int_{-1}^{+1} |t|.cos(k\omega_0 t)dt = 2\int_0^{+1} t.cos(k\pi t)dt$$

$$A_k = 2[\frac{t}{k\pi} sin(k\pi t)]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 sin(k\pi t)dt$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi} sin(k\pi) + \frac{2}{(k\pi)^2}(cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{(k\pi)^2}(cos(k\pi) - 1)$$

Si k est pair, $A_k = 0$. Si k est impair, alors $A_k = \frac{-4}{(k\pi)^2}$. On peut noter aussi : $A_k = \frac{-4}{((2k+1)\pi)^2}$ pour k $>$0.

On en déduit la forme trigonométrique des coefficients de Fourier : $C_0 = \frac{1}{2}$ et $C_k = \frac{-2}{((2k+1)\pi)^2}$ pour k > 0.

c. La fonction g_3 est de classe C1 et continue par morceaux. Toutes les discontinuités sont de première espèce, donc le développement en série de Fourier converge partout.

d. Sur l'intervalle [0 ;1[, la fonction f(t) peut être développée selon la série suivante :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-4}{((2k+1)\pi)^2} cos(k\pi t)$$

4. On peut conclure qu e, pour une fonction non périodique, il n'existe pas une décomposition unique sous la forme d'une série trigonométrique, contrairement à une fonction périodique.

Exercice 7

Donnez la définition, la période et la parité des fonctions représentées par les séries de Fourier suivantes et tracez leur graphe :

1. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} cos(2nt) = sin(t) \ \ avec\ t\ \in [0; \pi]$

2. $2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} sin(n\pi t) = 1 \ \ avec\ t \ \in [0;1]$

3. $\pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} sin(nt) = t \ \ avec\ t \ \in [0;2\pi]$

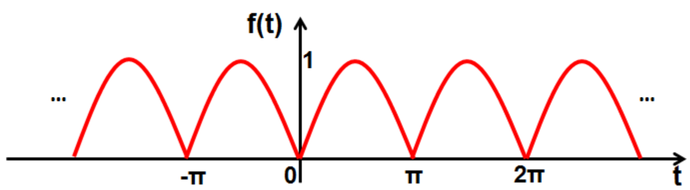
Correction exercice 7

Dans cet exercice, on fournit la décomposition en série de Fourier (terme de gauche des trois égalités) de trois fonctions périodiques, dont on cherche la définition. Pour cela, il est nécessaire d'exploiter les quelques indices à notre disposition.

Pour les trois questions, il est important de noter que l'égalité n'est valable que sur l'intervalle de temps qui est précisé à chaque fois. La série de Fourier (terme de gauche) converge vers le terme de droite sur cet intervalle. Cette information constitue un indice pour déterminer la définition de la fonction dont la décomposition en série de Fourier est donnée par le terme de gauche de l'égalité. En effet, elle donne une partie de la fonction recherchée. Puisque la fonction recherchée est périodique, en analysant le développement en série de Fourier, la période peut être déduite. En outre, la recherche de parité basée sur les propriétés des séries de Fourier peut fournir un autre indice pour déterminer la fonction.

1. L'égalité montre que sur l'intervalle $[0;\pi]$, la fonction recherchée est égale à sin(t). Il nous faut chercher d'autres indices pour déterminer la fonction en dehors de cette intervalle.

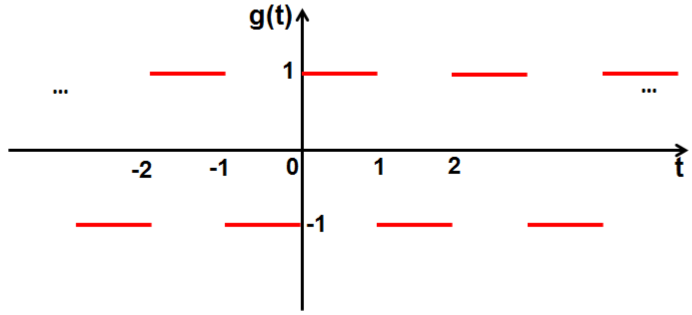
La fonction est nécessairement périodique, sinon elle ne serait pas décomposable en série de Fourier. On peut déterminer aisément sa période en calculant celle du terme trigonométrique fondamental (n=1). La pulsation fondamentale $\omega_0 = 2$, on déduit la période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi$. On peut en déduire la définition de la fonction (notée f(t)), qui est une répétition périodique (période π) d'une demi-alternance de fonction sinusoïdale (de période 2_{pi}) dont le tracé est précisé ci-dessous :

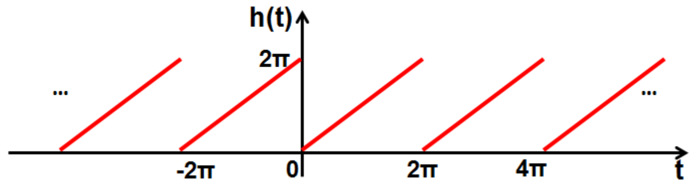


L'étude de la parité de la fonction peut confirmer cette déduction. Dans le développement en série de Fourier, aucun terme sinusoïdal n'apparait. La fonction doit donc être paire, ce qui est bien le cas de la fonction f(t). Un dernier indice est la composante continue. Le développement en série de Fourier nous indique qu'elle est égale à $\frac{2}{\pi}$. On peut calculer celle de la fonction f(t) et vérifier qu'elle est aussi égale à $\frac{2}{\pi}$.

2. On applique la même démarche que dans la question précédente. La fonction recherchée est égale à 1 sur l'intervalle [0 ;1]. Cherchons maintenant sa période, en déterminant celle du terme harmonique (n=1). La pulsation fondamentale $\omega_0 = \pi$, on déduit la période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2$. L'égalité nous donne la forme de la fonction uniquement sur une demi-période. L'étude de la parité de la fonction peut nous aider à déduire la définition de la fonction sur l'autre demi-période. L'absence de termes cosinusoidaux (et de composante continue qui est un terme cosinusoïdaux de rang 0) nous indique que la fonction est impaire, donc la fonction est égale à -1 sur l'autre demi-période (par exemple l'intervalle [-1 ;0]). Une autre manière de tirer la même conclusion est de remarquer l'absence de composante continue. La fonction que nous noterons g(t) présente donc l'allure suivante :

3. La fonction recherchée est égale à t sur l'intervalle $[0;2\pi]$. Cherchons maintenant sa période, en déterminant celle du terme harmonique (n=1). La pulsation fondamentale $\omega_0 = 1$, on déduit la période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$. L'égalité nous donne la forme de la fonction, que nous notons h(t), sur une période complète. On peut donc en déduire la forme, donnée par la figure ci-dessous :





La fonction h(t) présente une composante continue égale à π, ce qui est bien celle du développement en série de Fourier. Graphiquement, on remarque que la fonction h(t) n'est ni paire, ni impaire. Pourtant, l'absence de terme cosinusoïdaux pourrait nous inciter à penser qu'elle devrait être paire. Cependant, la présence d'une composante continue indique qu'il reste le terme cosinusoïdal de rang 0.

Exercice 8 - Signal de forme exponentielle

On considère la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de période $T = 2\pi$, par $x(t) = e^t$ pour $t \in [0; +2\pi[$.

1. Tracez la fonction x(t) sur l'intervalle $[-2\pi; +2\pi[$.

2. Cette fonction admet-elle un développement en série de Fourier ?

3. Montrez que les coefficients de Fourier sous la forme exponentielle sont égaux à $c_n = \frac{1+jn}{2\pi(1+n^2)}(e^{2\pi} - 1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

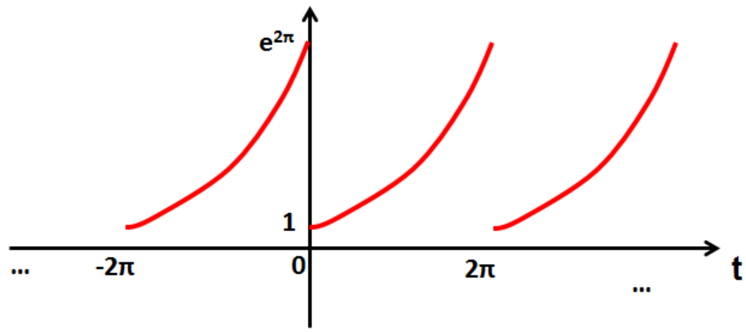
4. En déduire les expressions des coefficients de Fourier sous leur forme trigonométrique.

5. Calculez la puissance moyenne des harmoniques, quelle que soit leur rang.

6. Calculez la puissance moyenne du signal.

<u>Correction exercice 8</u>

1. Tracé de la fonction x(t) :
2. C'est une fonction périodique donc elle peut être décomposée en série de Fourier. Celui-ci converge en tout point même si la fonction est de classe C1 (continue par morceaux), car les discontinuités qui apparaissent tous les multiples de 2π sont des discontinuités de première espèce. En ces points de discontinuité, la série converge vers $\frac{e^{2\pi}+1}{2}$.



3. La période du signal $T_0 = 2\pi$ et la pulsation fondamentale $\omega_0 = 1$:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^t e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi(1-jn\omega_0)}(e^{(1-jn\omega_0)2\pi} - 1)$$

$$C_n = \frac{1+jn}{2\pi(1+n^2)}(e^{2\pi} - 1)$$

4.

$$A_n = 2Re[C_n] = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1+n^2)}$$

$$B_n = -2Im[C_n] = \frac{-n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1+n^2)}$$

5. La puissance moyenne associée à chaque harmonique se calcule de la manière suivante :

$$Pmoy_n = |C_n|^2 + |C_{-n}|^2 = \frac{(e^{2\pi} - 1)^2}{2\pi^2(1+n^2)} \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

$$Pmoy_0 = |C_0|^2 = \frac{(e^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2}$$

6. La puissance moyenne du signal est de :

$$P_{moy} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2t}dt = \frac{e^{4\pi} - 1}{4\pi}$$

Exercice 9 - Modulation à largeur d'impulsion

La modulation à largeur d'impulsion (MLI) (Pulse Width Modulation PWM en anglais) est une technique couramment utilisée en électronique pour générer un signal analogique à partir d'un signal discret à deux états. Le signal MLI $s_p(t)$ est constitué d'une suite périodique, de période T, d'impulsions $s_i(t)$ définie par :

$$s_i(t) = \begin{cases} A & si\ t\ \in [0; \alpha T] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où $\alpha \in [0; 1]$ est appelé le rapport cyclique du signal (duty ratio en anglais). Le principe est illustré à la figure 5.7. Réciproqiement, à partir d'un signal analogique de valeurs comprises entre 0 et A, un modulateur MLI va produire le signal MLI à partir de deux niveaux de tension seulement.

1. Vérifiez si on peut développer $s_i(t)$ et $s_p(t)$ en séries de Fourier.

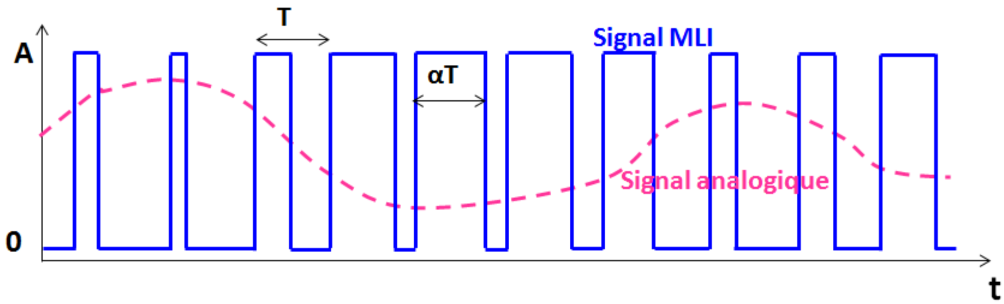


FIGURE 5.7 – Illustration modulation MLI

2. Calculez les coefficients de Fourier exponentiels du signal MLI $s_p(t)$ et vérifiez la relation avec les coefficients de Fourier réels.

3. Que deviennent ces coefficients si l'on considère le signal $s_p(t)$ de même période mais retardé d'un temps $\tau \in \mathbb{R}^*$.

4. Calculez la puissance moyenne du signal, ainsi que celles de la somme de tous les termes de la série de Fourier. Sont-elles égales ?

5. Quelle est la puissance moyenne transportée par le premier harmonique ?

6. Une manière économique de reconstituer un signal analogique à partir du signal MLI est de le filtrer, à l'aide d'un filtre passe-bas que l'on supposera idéal. Sa fréquence de coupure est notée f_c. Quelle est la forme du signal selon f_c ? Quelle fréquence de coupure choisiriez-vous pour que le signal en sortie du filtre soit constant et proportionnel au rapport cyclique ? Est-ce un bon choix pour reconstituer le signal analogique ?

7. Quelle est l'énergie du signal en sortie du filtre ? En déduire le rendement du système de conversion ?

Correction exercice 9

1. La fonction $s_i(t)$ ne peut pas être décomposée en série de Fourier car elle n'est pas périodique, contrairement à la fonction $s_p(t)$. Son développement en série de Fourier converge partout car $s_p(t)$ est continue et de classe C^1 par morceau, et ne présente que des discontinuités de première espèce.

2. Calculons les coefficients de Fourier sous leur forme complexe C_k :

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} Ae^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{jA}{k2\pi}(e^{-jk\alpha 2\pi} - 1)$$

Remarque : la division par k peut sembler créer une singularité pour k = 0 (coefficient C_0 correspondant à la valeur moyenne du signal). Cependant, par un développement limité sur la fonction exponentielle, on démontre que ce n'est pas le cas.

$$\lim_{k\to 0} \frac{jA}{k2\pi}(e^{-jk\alpha 2\pi} - 1) = \lim_{k\to 0} \frac{jA}{k2\pi}(1 - jk\alpha 2\pi - 1) = \alpha A$$

Ce qui correspond bien à la valeur moyenne du signal $s_p(t)$.

Calculons maintenant les coefficients de Fourier réels (sous leur forme trigonométrique) :

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^{\alpha T} Acos(-jk\omega_0 t)dt = \frac{A}{k\pi}sin(k\alpha 2\pi)$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^{\alpha T} Asin(-jk\omega_0 t)dt = \frac{A}{k\pi}(1 - cos(k\alpha 2\pi))$$

On vérifie sans difficulté la relation entre les coefficients de Fourier sous leur forme complexe et trigonométrique :

$$C_k = \frac{A_k - jB_k}{2}$$

3. Théorème du retard : le retard modifie les coefficients de Fourier comme ceux-ci :

$$C'_k = C_k e^{-jk\omega_0\tau} = \frac{jA}{k2\pi}(e^{-jk\alpha 2\pi} - 1)e^{-jk2\pi\frac{\tau}{T}}$$

Le retard ne modifie pas le module des coefficients de Fourier, seulement leur phase. D'après l'égalité de Parseval, cela n'a donc aucune incidence sur la puissance moyenne du signal.

4. Puissance moyenne du signal :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^{T} s_p(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} A^2 dt = \alpha A^2$$

D'après l'égalité de Parseval, on peut écrire :

$$P_{moy} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 = |A_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|A_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|B_k|^2$$

5. D'après l'égalité de Parseval, la puissance moyenne transportée par la première harmonique est donnée par :

$$P_{moy1} = |C_{-1}|^2 + |C_1|^2 = 2|C_1|^2 = \frac{A^2}{2\pi^2}[(cos(\alpha 2\pi) - 1)^2 + sin(\alpha 2\pi)^2]$$

6. Plus f_c est réduite, plus les harmoniques de haut rang sont atténuées. Il en résulte un adoucissement des transitions.

Si la fréquence de coupure du filtre est sélectionnée en dessous de l'harmonique de rang 1, toutes les harmoniques sont atténuées et seule la composante continue est préservée. Le signal de sortie devient alors quasiment égal à la composante continue (aux résidus près des harmoniques de rang supérieur).

7. Le signal de sortie du filtre est donc égale à : $s(t) = \alpha A$. La puissance moyenne du signal de sortie est donc égale à : $Ps_{moy} = (\alpha A)^2$.

Celle du signal d'entrée (voir question 4) est égale à $Pe_{moy} = \alpha A^2$. Le rendement η est égal au rapport entre la puissance moyenne du signal en sortie du filtre sur celle du signal en entrée du filtre. Le rendement vaut donc :

$$\eta = \frac{Ps_{moy}}{Pe_{moy}} = \frac{(\alpha A)^2}{\alpha A^2} = \alpha$$