Signal et Filtrage - Corrections des exercices du chapitre 3

Alexandre Boyer, Pascal Acco, Léa Cot, Etienne Sicard

Septembre 2019

Signal & Filtrage

2 IMACS
2019 - 2020
alexandre.boyer@insa-toulouse.fr

Chapitre 1

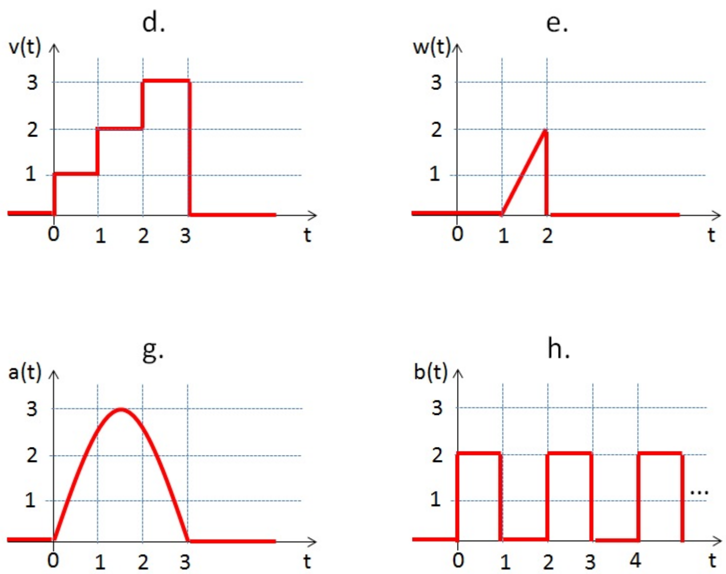
Chapitre 2

Chapitre 3

Transformée de Laplace

Exercice 1

Déterminez les transformées de Laplace des fonctions suivantes :
a. $x(t) = e^{-2t}u(t-1)$
b. $y(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$
c. $z(t) = \sqrt{2}cos(t + \frac{\pi}{4})u(t)$



<u>Correction exercice 1</u>

a. Attention à ne pas utiliser le théorème du retard trop hâtivement (seul l'échelon de Heaviside est retardé) !

$X(p) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}u(t-1)e^{-pt}dt = \int_1^{+\infty} e^{-(p+2)t}dt = \frac{e^{-(p+2)}}{p+2}$

Domaine de convergence : p > -2.

b. Théorème du retard : $Y(p) = \frac{e^{-p}}{p+2}$

Domaine de convergence : p > -2.

c. $z(t) = \sqrt{2}(cos(t)cos(\frac{\pi}{4}) - sin(t)sin(\frac{\pi}{4})) = cos(t) - sin(t)$

$Z(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{p-1}{p^2+1}$

A noter que le théorème du retard ne peut pas s'appliquer ici : les fonctions cos et échelon u n'ont pas les mêmes arguments temporels !

Domaine de convergence : p > 0.

d. $v(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-3) \;\Rightarrow\; V(p) = \frac{1+e^{-p}+e^{-2p}-3e^{-3p}}{p}$
Domaine de convergence : p > 0.

e. $w(t) = 2(t-1)u(t-1) - 2(t-2)u(t-2) - 2u(t-2) \;\Rightarrow\; W(p) = \frac{2e^{-p}}{p^2}(1 - e^{-p} - pe^{-p})$
Domaine de convergence : p > 0.

g. On identifie l'expression suivante pour la fonction : $a(t) = 3sin(\frac{\pi}{3}t).(u(t) - u(t-3))$.

$a(t) = 3sin(\frac{\pi}{3}t)u(t) - 3sin(\frac{\pi}{3}(t-3))u(t-3) \;\Rightarrow\; A(p) = \frac{\pi(1-e^{-3p})}{p^2+(\frac{\pi}{3})^2}$
Converge pour toutes les valeurs de p.

h. Il s'agit d'une fonction périodique. En déterminant la transformée de Laplace de la fonction génératrice $B_0(p)$, on pourra déterminer ensuite celle de la fonction périodique $B(p)$.
$b_0(t) = 2u(t) - 2u(t-1) \;\Rightarrow\; B_0(p) = 2\frac{1-e^{-p}}{p}$
La périodicité d'une fonction de période T se traduit, dans le domaine de Laplace par une multiplication par le terme : $\frac{1}{1-e^{pT}}$. La transformée de Laplace de la fonction b(t), de période T = 2, s'écrit donc : $B(p) = 2\frac{1-e^{-p}}{p(1-e^{2p})}$.
Converge pour toutes les valeurs de p sauf 0.

Exercice 2

Déterminez les expressions temporelles des fonctions suivantes :
a. $X(p) = \frac{p-4}{p^2+16}$
b. $Y(p) = \frac{p^2+3p+3-\frac{6}{p}}{p^2}$
c. $Z(p) = \frac{p^2+4p+4}{p^2+2p+2}$
d. $W(p) = \frac{p-1+e^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}$. Tracez cette fonction.

__**Correction exercice 2**__

a. $x(t) = [cos(4t) - sin(4t)]u(t)$
b. $Y(p) = 1 + \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} - \frac{6}{p^3} \;\Longrightarrow\; y(t) = \delta(t) + 3u(t) + 3t \cdot u(t) - 3\frac{t^2}{2!} \cdot u(t)$
c. $Z(p) = 1 + \frac{2p+2}{p^2+2p+2} \;\Longrightarrow\; z(t) = \delta(t) + 2e^{-t}cos(t)u(t)$
d. Laissons d'abord de côté le terme $\frac{1}{1-e^{-p}}$ car il indique une périodicité de période T=1. Soit la fonction $W_1(p) = \frac{p-1+e^{-p}}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2}$. On en déduit $w_1(t) = u(t) - tu(t) + (t-1)u(t-1)$ (pour le dernier terme, utilisation du théorème du retard). La fonction $w(t) = w_1(t - kT)$, avec k > 0. Cela correspond à une fonction périodique en dent de scie.

Exercice 3

Résoudre les équation différentielles suivantes :
a. $x" + 2x' + x = e^{-t}u(t)$, avec x(0) = 0 et x'(0) = 0.
b. $x" + 6x' + 8x = \delta(t)$ avec x(0)=1 et x'(0)=3.

__**Correction exercice 3**__

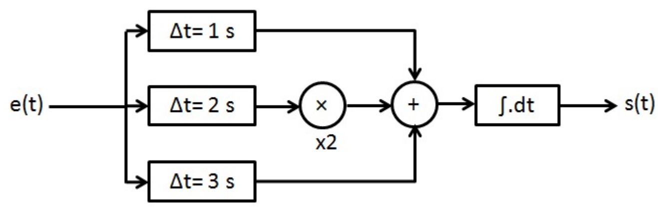
a. $p^2X(p) + 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p+1} \Rightarrow X(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$. En considérant le théorème de translation de p, en posant P=p+1 : $X(P) = \frac{1}{P^3}$, soit $X(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$, qui devient après changement de variable : $x(t) = e^{-t}\frac{t^2}{2}u(t)$.

b. $p^2X(p) - p - 3 + 6pX(p) - 6 + 8X(p) = 1$

$X(p) = \frac{p+10}{(p+2)(p+4)} = \frac{4}{p+2} - \frac{3}{p+4}$, d'où $x(t) = (4e^{-2t} - 3e^{-4t})u(t)$.

Exercice 4

On reprend l'exercice 8 du chapitre 2.



a. Ecrivez la fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace.

b. Calculez la réponse indicielle du système. On supposera que les conditions initiales de tous les nœuds internes du système sont nulles.

<u>Correction exercice 4</u>

a.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{e^{-p} + 2e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

b. Soit $e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$. La transformée de Laplace du signal de sortie s'écrit donc :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{e^{-p} + 2e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2}$$

On identifie une somme de terme en $\frac{1}{p^2}$ représentant des fonctions rampes, démarrant à 0 (pas de conditions initiales). Les termes exponentielles complexes introduisent des retards :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)] = (t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$$

Le signal en sortie diverge, à cause du caractère intégrateur du système.

Exercice 5

On considère un circuit électrique, dont le courant i(t) est donné par l'équation ci-dessous.

$$e(t) = \frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 10i(t)$$

On considère l'excitation suivante $e(t) = 6e^{-3t}u(t)$. Les conditions initiales du circuit sont : $i(0) = 3\ A$ et $\frac{di}{dt}(0) = 3\ A/s$.

a. Etablir l'expression du courant dans le domaine de Laplace.

b. En déduire l'expression temporelle du courant i(t).

c. Vérifiez, en utilisant les expressions du courant dans le domaine de Laplace, puis dans le domaine temporel, que la condition initiale du courant est respectée. Déterminez ensuite les conditions finales.

Correction exercice 5

a. A partir de l'équation différentielle et des conditions initiales, la transformée de Laplace est la suivante :

$$p^2 I(p) - pi(0) - i(0) + 7pI(p) - 7i(0) + 10I(p) = \frac{6}{p+3}$$

On transforme ensuite cette relation pour exprimer I(p) sous la forme d'une somme d'éléments dont nous disposons l'expression temporelle (par exemple, fonction rationnelle).

$$I(p) \cdot (p^2 + 7p + 10) = \frac{6}{p+3} + 3(p+8)$$

$$I(p) \cdot (p+2)(p+5) = \frac{3(p^2 + 11p + 26)}{p+3}$$

$$I(p) = \frac{3(p^2 + 11p + 26)}{(p+3)(p+2)(p+5)}$$

En utilisant la méthode du cache, on décompose en pôles et résidus l'expression précédente.

$$I(p) = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+5}$$

$$(p+2)I(p) = \frac{3(p^2 + 11p + 26)}{(p+3)(p+5)} = A + \frac{B(p+2)}{p+3} + \frac{C(p+2)}{p+5} \rightarrow p = -2 \, : \, A = \frac{3((-2)^2 + 11 \cdot (-2) + 26)}{(-2+3)(-2+5)} = 8$$

$$(p+3)I(p) = \frac{3(p^2 + 11p + 26)}{(p+2)(p+5)} = \frac{A(p+3)}{p+2} + B + \frac{C(p+3)}{p+5} \rightarrow p = -3 \, : \, B = \frac{3((-3)^2 + 11 \cdot (-3) + 26)}{(-3+2)(-3+5)} = -3$$

$$(p+5)I(p) = \frac{3(p^2 + 11p + 26)}{(p+2)(p+3)} = \frac{A(p+5)}{p+2} + \frac{B(p+5)}{p+3} + C \rightarrow p = -5 \, : \, C = \frac{3((-5)^2 + 11 \cdot (-5) + 26)}{(-5+2)(-5+3)} = -2$$

L'expression du courant dans le domaine de Laplace peut s'écrire de la manière suivante :

$$I(p) = \frac{8}{p+2} - \frac{3}{p+3} - \frac{2}{p+5}$$

b. A partir de l'expression précédente, on en déduit directement la forme temporelle du courant à l'aide de la table des transformées de Laplace inverse usuelles.

$$i(t) = (8e^{-2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-5t})u(t)$$

c. Condition initiale du courant : d'après les propriétés de la transformée de Laplace, on sait que :

$$\lim_{t \to 0^+} i(t) = \lim_{p \to +\infty} pI(p)$$

On vérifie cette égalité en retrouvant la valeur de la condition initiale du courant.

$$\lim_{t \to 0^+} i(t) = \lim_{t \to 0^+} (8e^{-2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-5t})u(t) = 8 - 3 - 2 = 3 \ A$$

$$\lim_{p \to +\infty} pI(p) = \lim_{p \to +\infty} \frac{8p}{p+2} - \frac{3p}{p+3} - \frac{2p}{p+5} = 8 - 3 - 2 = 3 \ A$$

Condition finale du courant : d'après les propriétés de la transformée de Laplace, on doit vérifier que :

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = \lim_{p \to 0} pI(p)$$

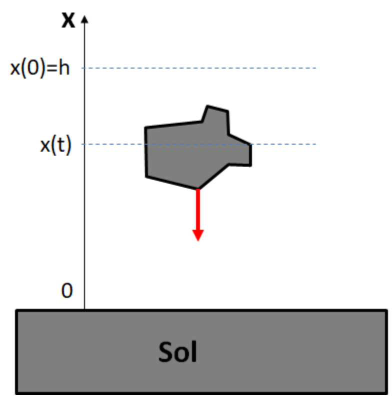
On détermine ainsi la valeur finale du courant.

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = \lim_{t \to +\infty} (8e^{-2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-5t})u(t) = 0\ A$$

$$\lim_{p \to 0} pI(p) = \lim_{p \to 0} \frac{8p}{p+2} - \frac{3p}{p+3} - \frac{2p}{p+5} = 0\ A$$

Exercice 6 - Chute libre

On considère un objet de masse m, placé initialement à une hauteur h au-dessus du sol. En t = 0-, sa vitesse est supposée nulle. On note g l'accélération du champ de pesanteur terrestre. On étudie dans cet exercice son mouvement en chute libre (t > 0).



1. Dans un premier temps, on néglige l'effet des frottements de l'air. Etablir le bilan des forces s'exerçant sur l'objet lorsqu'il est en chute libre. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir une équation différentielle reliant la position x(t) de l'objet et l'accélération g.

2. Exprimez cette équation différentielle dans le domaine de Laplace.
3. En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminez l'expression donnant l'évolution temporelle de la position x(t) de l'objet.

4. Dans un second temps, on considère les frottements de l'objet dans l'air. On suppose que ces frottements restent faibles et qu'ils peuvent être modélisés par une loi linéaire où la force des frottements $\vec{F_f} = -k.\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse. k est une constante de frottement linéaire. Reprendre la question 1 en prenant en compte les frottements de l'air.

5. Exprimez cette équation différentielle dans le domaine de Laplace.
6. En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminez l'expression donnant l'évolution temporelle de la position x(t) de l'objet.

7. A réutilisant le résultat de la question 5, déterminez l'expression donnant l'évolution de la vitesse de chute de l'objet.

8. En considérant des frottements quadratiques, pourrait-on déterminer l'expression de l'évolution temporelle de la position de l'objet en suivant la méthode précédente ?

Correction exercice 7

1. La seule force exercée sur l'objet est la pesanteur terrestre, données par $\vec{F_g} = -mg\vec{x}$. En applicant le second principe de Newton, reliant l'accélération $\ddot{x}$ d'un objet à la somme algébrique des forces qui lui sont appliquées, on peut écrire :

$$\vec{F_g} = m\ddot{x}\vec{x} \quad \rightarrow \quad -mg = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -g$$

2. $p^2X(p) - px(0^-) - \frac{dx(0^-)}{dt} = -\frac{g}{p}$ avec $x(0^-) = h$ et $\frac{dx(0^-)}{dt} = 0$, d'où la relation suivante dans le domaine de Laplace :

$$X(p) = -\frac{g}{p^3} + \frac{h}{p}$$

3. L'utilisation du tableau de transformée de Fourier courante permet d'extraire l'expression temporelle de x(t) :

$$x(t) = -g\frac{t^2}{2} + h \quad , \quad t > 0$$

4. Deux forces sont exercées sur l'objet :

1. la pesanteur terrestre, données par $\vec{F_g} = -mg\vec{x}$
2. les frottements linéaires de l'air, donnés par $\vec{F_f} = -k\vec{v} = -k\dot{x}\vec{x}$

En appliquant le second principe de Newton, on peut écrire :

$$\vec{F_g} + \vec{F_f} = m\ddot{x}$$

$$-g - \frac{k}{m}\dot{x} = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = -g$$

5.

$$X(p) = -\frac{g}{p^2(p+\frac{k}{m})} + \frac{h}{p+\frac{k}{m}} + \frac{hk}{m}\frac{1}{p(p+\frac{k}{m})}$$

$$X(p) = -\frac{g}{p^2(p+\frac{k}{m})} + \frac{h}{p}$$

6. On peut réécrire la relation précédente sous la forme suivante :

$$X(p) = -\frac{gm}{kp}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{k}{m}}) + \frac{h}{p}$$

L'utilisation du tableau de transformée de Fourier courante permet d'extraire l'expression temporelle de x(t) :

$$x(t) = -g\frac{m}{k}\int_0^t [1 - e^{\frac{-uk}{m}}]du + h$$

$$x(t) = -g\tau t + g\tau^2(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) + h$$

avec $\tau = \frac{m}{k}$. L'analyse de l'expression montre que la position décroit linéairement en fonction du temps après une période initiale durant laquelle elle décroit de manière exponentielle.

7. La vitesse $v(t)\dot{x}$ de l'objet est donnée par la dérivée de x(t). On peut utiliser la transformée de Laplace pour déterminer son expression.

$$V(p) = pX(p) - x(0^-) = -\frac{gm}{k}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{k}{m}}) + h - h = -\frac{gm}{k}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{k}{m}})$$

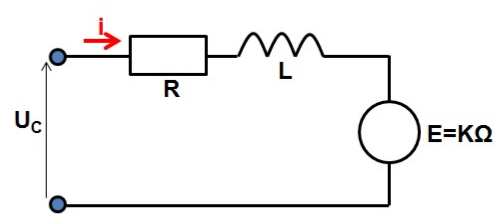
On en déduit l'expression de la vitesse v(t) :

$$v(t) = -g\tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

8. Le modèle de frottements quadratiques indiquent que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse. Elle introduit une non linéarité dans l'équation différentielle du mouvement de l'objet, n'autorisant plus la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle. Des méthodes numériques sont dès lors requises pour résoudre ce type d'équation, ce qui dépasse le cadre de ce cours.

Exercice 7 - Réponse d'un moteur à courant continu à aimants permanents

Le fonctionnement d'un moteur est gouverné par un modèle électromécanique, se présentant sous la forme de plusieurs équations différentielles reliant grandeurs électriques et mécaniques. Dans cet exercice, nous allons étudier le modèle simplifié d'un moteur à courant continu à aimants permanents. La figure ci-dessous présente le modèle électrique équivalent de l'induit. Celui-ci est modélisé par un circuit RL et est excité par une tension de commande notée U_C. Lorsque le moteur tourne, une force contre électromotrice (fcem) E est induite, qui est proportionnelle à la vitesse angulaire du moteur Ω. Le courant i circulant



dans l'induit produit un couple moteur C_m, selon la même constante de proportionnalité K que celle liant la fcem et la vitesse de rotation du moteur. A ce couple moteur s'opposent plusieurs sources de couples résistants C_R :

— l'inertie du moteur, donnée par le moment d'inertie J
— les frottements visqueux, caractérisés par le coefficient de frottement visqueux f

L'équation mécanique du moteur s'écrit alors :

$$C_m = C_R = J\frac{d\Omega}{dt} + f\Omega$$

Nous cherchons à déterminer la vitesse de rotation du moteur en fonction de l'excitation appliquée. Dans cet exercice, on considèrera les valeurs suivantes : r=0.2 Ω, L = 0.2 mH, K = 0.057 N.m/A, J = 650.10^{-7} $kg.m^2$, f = $2.3.10^{-5}$ $N.m/rad.s^{-1}$. On suppose que le moteur est initialement à l'arrêt.

a. Etablir l'équation différentielle reliant la vitesse de rotation et l'excitation U_C du moteur.
b. Déterminez la fonction de transfert du moteur dans le domaine de Laplace. Exprimez-la sous la forme $\frac{G}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}$. Précisez les expressions littérales de G, α et ω_0. Calculez leurs valeurs.
c. Calculez les pôles du système. Que concluez-vous sur la réponse du système ? Est-ce satisfaisant ?
d. Déterminez l'expression de la réponse impulsionnelle du système. Esquissez son profil temporel.

e. Question bonus : En t = 0, on applique une commande de type échelon unitaire d'amplitude Uc_0 = 10 V. Déterminez l'expression de l'évolution de la vitesse angulaire. Esquissez le profil temporel de la vitesse angulaire. En régime permanent, quelle est la valeur de la vitesse ?

Correction exercice 7

a. Relation électrique et en remplaçant le courant par le couple :

$$U_C(t) = L\frac{di}{dt} + ri + E = L\frac{di}{dt} + ri + K\Omega(t)$$

$$U_C(t) = \frac{L}{K}\frac{dC_m}{dt} + \frac{r}{K}C_m + K\Omega(t)$$

En utilisant l'équation mécanique :

$$U_C(t) = \frac{L}{K}\frac{d}{dt}(J\frac{d\Omega}{dt} + f\Omega) + \frac{r}{K}(J\frac{d\Omega}{dt} + f\Omega) + K\Omega(t)$$

$$U_C(t) = \frac{LJ}{K}\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{Lf + rJ}{K}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{rf + K^2}{K}\Omega(t)$$

b. Passage dans le domaine de Laplace :

$$U_C(p) = \frac{LJ}{K}p^2\Omega(p) + \frac{Lf + rJ}{K}p\Omega(p) + \frac{rf + K^2}{K}\Omega(p)$$

La fonction de transfert du moteur relie la tension de commande (l'excitation) à la vitesse de rotation (la réponse) :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U_C(p)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{p^2 + (\frac{f}{J} + \frac{r}{L})p + \frac{rf+K^2}{LJ}}$$

On retrouve la fonction de transfert typique d'un système d'ordre 2, que l'on peut écrire sous cette forme :

$$H(p) = \frac{G}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}$$

avec : $G = \frac{K}{LJ} = 4384615$, $\alpha = 0.5(\frac{f}{J} + \frac{r}{L}) = 500.18$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{rf+K^2}{LJ}} = 500.28$.

c. Les pôles sont les racines du polynôme $p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2$. Son déterminant vaut : $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2)$. Il est négatif donc les deux racines sont complexes, conjuguées et égales à :

$$p_1 = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad et \quad p_2 = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Le systèmes présentent deux pôles complexes, dont les parties réelles sont négatives. Le système est donc stable. La partie imaginaire introduit un comportement oscillant, mais qui reste limité en raison de la faiblesse de la partie imaginaire. Lorsque le moteur sera excité, sa réponse sera gouvernée par un comportement exponentiel décroissant. Cette stabilité et l'absence d'oscillations sont deux propriétés attendues pour le contrôle d'un moteur, afin d'éviter tout à-coup et instabilité. De plus, en éliminant toute oscillation, le système se stabilise rapidement en régime permanent (vitesse finale atteinte rapidement).

d. La réponse impulsionnelle est directement la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert, que l'on décompose d'abord en fractions partielles. On peut montrer que :

$$\frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} = \frac{j}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}}(\frac{-1}{p - p_1} + \frac{1}{p - p_2})$$

On décompose donc la fonction de transfert sous la forme suivante :

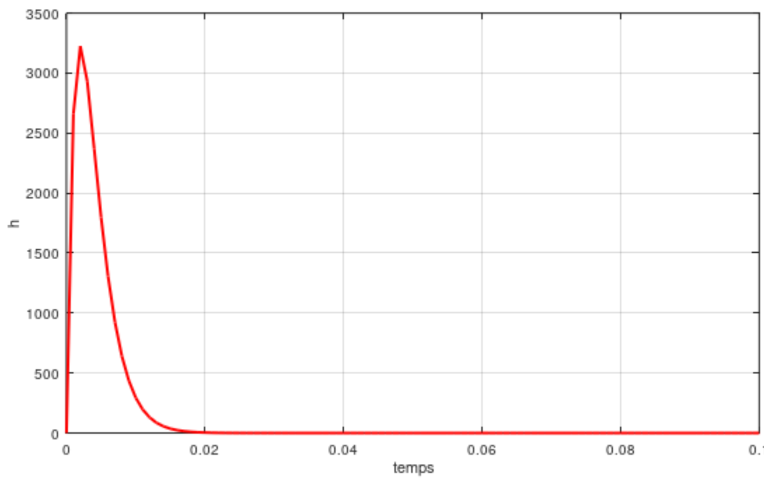
$$H(p) = \frac{jG}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}}(\frac{-1}{p - p_1} + \frac{1}{p - p_2})$$

En identifiant la transformée de Laplace inverse des fractions partielles (exponentielle complexe), on trouve la réponse impulsionnelle h(t) :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} = \frac{jG}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}} e^{-\alpha t}(-e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t} + e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t})$$

$$h(t) = \frac{G}{\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}} e^{-\alpha t} sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2 t})$$

La figure ci-dessous présente un tracé de la réponse impulsionnelle :



e. Le calcul de la réponse indicielle a(t) peut se faire directement à partir de la réponse impulsionnelle, en l'intégrant de 0 à t.

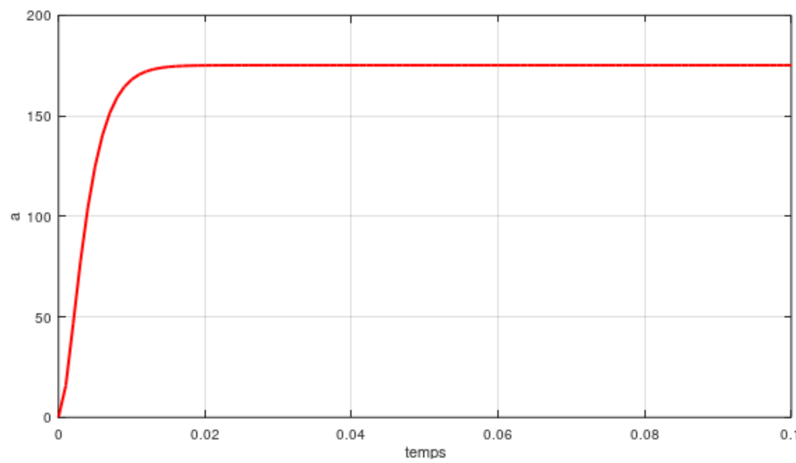
$$a(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = \frac{jG}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}} \int_0^t (-e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t} + e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t})d\tau$$

On arrive au résultat final suivant :

$$a(t)\frac{G}{\omega_0^2}(1 - e^{-\alpha t} cos(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t) - \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t))$$

La réponse est illustrée ci-dessous (pour un indice d'amplitude = 10 V). Il est la superposition d'un terme exponentiel décroissant et de terme trigonométriques, avec des oscillations de pulsation égale à $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Les termes α^2 et ω_0^2 étant très proches, les oscillations sont de très grande période et n'ont pas d'effets visibles.

En régime permanent, pour un échelon de 10 V, la valeur de la vitesse de rotation est égale à $10\frac{G}{\omega_0^2} = 175 rad.s^{-1}$.


200
150
100
50
0
a
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
temps