Signal et Filtrage - Corrections des exercices

Alexandre Boyer, Pascal Acco, Léa Cot, Etienne Sicard

Septembre 2019

Signal & Filtrage

2 IMACS
2019 - 2020
alexandre.boyer@insa-toulouse.fr page Moodle

Chapitre 1

Chapitre 2

Annexe - Rappels mathématiques

Exercice 1 - Dérivée

Dérivez les fonctions suivantes, en précisant les domaines où les fonctions sont dérivables.
a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

b. $g(x) = (-4x^2 + 4)(x^2 + x - 1)$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$

d. $k(x) = sin(-2x^2 + 1)$

e. $m(x) = 4e^x + e^{j2x}$

f. $n(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Correction exercice 1

a. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$ avec $x \in \mathbb{R}$
b. $g'(x) = -8x(x^2 + x - 1) - 4(x^2 - 1)(2x + 1) = -4(4x^3 + 3x^2 - 4x - 1)$ avec $x \in \mathbb{R}$
c. $h'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ avec x > 1
d. $k'(x) = -4x.cos(-2x^2 + 1)$ avec $x \in \mathbb{R}$
e. $m'(x) = 4e^x + 2je^{j2x}$ avec $x \in \mathbb{R}$
f. $n'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

Exercice 2 - Calcul d'intégrales

Intégrez les fonctions suivantes : a.$\int_{-1}^{3}(x^2 - 4x + 3)dx$

b. $\int_0^1 (6x^2 + 8)e^{x^3+4x}dx$

c. $\int_0^{2\pi} cos(4x) + sin(\frac{x}{2})dx$

d. $\int_0^{2\pi} 4cos(4x)sin(4x)dx$

e. $\int_0^1 xe^x dx$

f. $\int_0^{\pi} x.sin(x)dx$

g. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3.cos(x)dx$

h. $\int_0^{2\pi} e^x.cos(x)dx$

Correction exercice 2

a. $\int_{-1}^{3}(x^2-4x+3)dx = [\frac{x^3}{3}-2x^2+3x]_{-1}^{3} = \frac{16}{3}$

b. $\int_0^1(6x^2+8)e^{x^3+4x}dx = 2[e^{x^3+4}]_0^1 = 294.83$

c. $\int_0^{2\pi} cos(4x)+sin(\frac{x}{2})dx = sin(\frac{x}{2})dx = 4$

d. $\int_0^{2\pi} 4cos(4x)sin(4x)dx = \int_0^{2\pi} 2sin(8x)dx = 0$

e. $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

f. $\int_0^{\pi} x.sin(x)dx = [-xcos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} cos(x)dx = \pi$

g. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3.cos(x)dx = 0$ (la fonction $x^3.cos(x)$ est impaire).

h. L'IPP n'amène à rien. Il est préférable de partir sur la représentation en exponentielle complexe de cos(x) :

$\int_0^{2\pi} e^x.cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{x(1+j)}+e^{x(1-j)}}{2}dx = [\frac{e^{x(1+j)}}{2(1+j)}]_0^{2\pi} + [\frac{e^{x(1-j)}}{2(1-j)}]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{2}$

Exercice 3 - Formules trigonométriques

a. Exprimez $cos(3x)+sin(3x)$ en fonction des termes $cos(x)$ et $sin(x)$.

b. Résoudre l'équation $cos(2x) = sin(x)$.

c. Calculez la valeur exacte de $cos(\frac{\pi}{12})$. En déduire les valeurs de $cos(\frac{11\pi}{12})$, $sin(5\frac{\pi}{12})$ et $cos(7\frac{\pi}{12})$.

d. Calculez la primitive de $f(x) = cos^4(x)$.

textbfCorrection exercice 3

a.$cos(3x)+sin(3x) = cos(2x+x)+sin(2x+x) = cos(2x)(cos(x)+sin(x))+sin(2x)(cos(x)-sin(x))$

$--> = cos^3(x)+3sin(x)cos^2(x)-3sin^2(x)cos(x)-sin^3(x)$

b. L'équation peut s'exprimer uniquement avec des termes en sin(x) :

$$cos(2x) = sin(x)$$

$$1-2sin^2(x) = sin(x)$$

$$2sin^2(x)+sin(x)-1 = 0$$

En posant $X = sin(x)$, cette équation devient une équation du second ordre :

$$2X^2+X-1 = 0$$

qui présente deux solutions réelles : $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$. On en déduit toutes les solutions de l'équation :

$$X_1 = sin(x_1) = -1 \;\Rightarrow\; X_1 = -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ , \quad k \in (Z)$$

$$X_2 = sin(x_2) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; X_2 = \frac{\pi}{6}+2k\pi\ ou\ X_2 = \frac{5\pi}{6}+2k\pi\ , \quad k \in (Z)$$

c. Il faut d'abord remarquer que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. A partir de là, en utilisant les formules trigonométriques, on trouve :

$$cos(\frac{\pi}{12}) = cos(\frac{\pi}{3})cos(\frac{\pi}{4})+sin(\frac{\pi}{3})sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$sin(\frac{\pi}{12}) = sin(\frac{\pi}{3})cos(\frac{\pi}{4}) - cos(\frac{\pi}{3})sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

On en déduit ensuite que $cos(\frac{11\pi}{12}) = -cos(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $sin(5\frac{\pi}{12}) = cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $cos(7\frac{\pi}{12}) = sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

d. On développe f(x) en terme du type $cos(k.x)$ avec $k \in \mathbb{N}$:

$$cos^4(x) = (cos^2(x))^2 = (\frac{1+cos(2x)}{2})^2 = \frac{1}{4}(1+cos(2x)+cos^2(2x))$$

$$cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}cos(2x) + \frac{1}{8}cos(4x)$$

On en déduit la primitive F(x) de la fonction f(x), où K est une constante réelle quelconque :

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin(2x) + \frac{1}{32}sin(4x) + K$$

Exercice 4 - Nombres complexes

Mettre sous la forme $a+jb$ les nombres complexes suivants :
a. $(4+j)(3-2j)$
b. $\frac{1-j}{2+j}$
c. $(2+j)(\frac{1+j}{2-2j})^*$
d. $\frac{(-2+j)^2}{|4+3j|}$

Donnez le module et l'argument des nombres complexes suivants :
e.$x = \frac{1+j}{1-j}$
f. $y = (\frac{(1-j)(1+j)}{4j})^*$ g. $z = (\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}})^2$

textbfCorrection exercice 4
a. $(4+j)(3-2j) = 14-5j$
b. $\frac{1-j}{2+j} = \frac{1-3j}{5}$
c. $(2+j)(\frac{1+j}{2-2j})^* = \frac{1-2j}{2}$
d. $\frac{(-2+j)^2}{|4+3j|} = \frac{3-4j}{5}$
e. $|x| = 1$ et $arg(x) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$
f. $|y| = \frac{1}{2}$ et $arg(y) = \frac{\pi}{2}$
g. $|z| = \frac{1}{2}$
et $arg(z) = 2\frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 5 - Exponentielles complexes

a. Mettre sous la forme $a+jb$ le nombre complexe $e^{j\frac{\pi}{12}}$.

b. Mettre sous la forme exponentielle complexe les nombres suivants : $1+j\sqrt(3)$, $\frac{j}{1+j}$, $\frac{2}{(1-j)^3}$.

c. Soit les nombres complexes $z_1 = 1+e^{j\theta}$, $z_2 = 1-e^{j\theta}$ et $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$. Donnez l'expression de leurs modules et leurs arguments.

textbf<u>Correction exercice 5</u>

a. $e^{j\frac{\pi}{12}} = cos(\frac{\pi}{12}) + jsin(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + j\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

b. $1 + j\sqrt(3) = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$
$\frac{j}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$
$\frac{2}{(1-j)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+j\frac{3\pi}{4}}$

c. $z_1 = e^{j\frac{\theta}{2}}e^{-j\frac{\theta}{2}} + e^{j\frac{\theta}{2}}e^{j\frac{\theta}{2}} = 2cos(\frac{\theta}{2})e^{j\frac{\theta}{2}}$.On a donc : $|z_1| = 2cos(\frac{\theta}{2})$ et $arg(z_1) = \frac{\theta}{2}$.
$z_2 = e^{j\frac{\theta}{2}}e^{-j\frac{\theta}{2}} - e^{j\frac{\theta}{2}}e^{j\frac{\theta}{2}} = 2sin(\frac{\theta}{2})e^{j\frac{(\theta-\pi)}{2}}$.On a donc : $|z_1| = 2sin(\frac{\theta}{2})$ et $arg(z_1) = \frac{(\theta-\pi)}{2}$.
On en déduit $|z_3| = tan(\frac{\theta}{2})$ et $arg(z_3) = -\frac{\pi}{2}$.